Ano 26º Lisboa, Março 2010 Nº 284

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email PUBLICAÇÃO MENSAL

jme@spm.pt

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva **Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Iniciamos hoje a publicação de alguns textos de Histrória da Matemática (pensados para a sala de aula), a partir de um livro de Helder Pinto.

Mais um excerto da obra de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* aparece, como sempre, nas páginas centrais.

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 LISBOA
Tel. 217 939 785

GALERIA DE MATEMÁTICOS

Jorge Nuno Silva

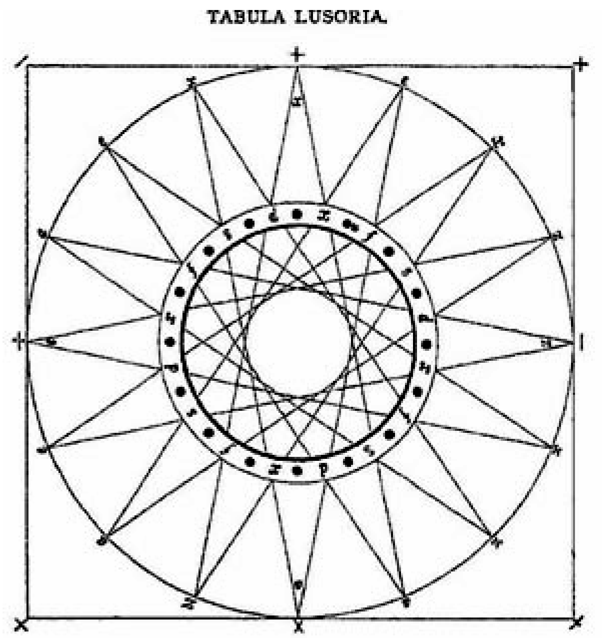
GEORGE BERKELEY

(1685 - 1753)

George Berkeley nasceu em Kilkenny, Irlanda, em 12 de Março de 1685. Cresceu no Castelo de Dysart. Em 1696 inscreveu-se em Kilkenny College e depois, em 1700, em Trinity College, Dublin, onde recebeu o seu doutoramente em 1704, tendo sido ordenado bispo pouco depois.

Ficou ligado ao Trinity College até 1724. Doutorado em 1717, tornou-se Senior Fellow.

A sua produção durante a estadia em Trinity College foi muito significativa. Em 1709 escreveu uma obra sobre Visão e em 1710 a primeira parte do seu importante *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge,* entre várias outras obras.



O tabuleiro de *Ludus Algebraicus*

Por volta de 1707 Berkeley, fascinado pelo poder da Álgebra, inventou um jogo pedagógico para o respectivo ensino, O Ludus Algebraicus. Trata-se essencialmente de um procedimento automático para gerar sistemas de equações lineares.

Em 1713, partiu para Londres, onde se relacionou com outros intelectuais da época, como Jonathan Swift, o autor de Gulliver, e Alexander Pope.

Viajou pelo continente, tendo-se relacionado com pensadores continentais, como Malebranche. Em 1717 assistiu à erupção do Vesúvio que descreveu numa carta à Royal Society.

Em 1724, abandona Trinity College. Casa em 1728 com Anne Foster e parte para os EUA, já que tencionava criar uma universidade nas Bermudas. Instalou-se em

Newport, Rhode Island, onde esperou por financiamento por parte do Parlamento Inglês, que lhe havia sido prometido. A sua casa, Whitehall, ainda existe.

Whitehall Museum House, 311 Berkeley Avenue
Middletown, Rhode Island

Aqui relacionou-se com os intelectuais locais, incluindo Samuel Johnson, que seria o primeiro presidente de King's College (hoje Universidade de Columbia). Em 1731, como o financiamento se tornasse inverosímil, regressou a Londres, tendo deixado a sua biblioteca a Yale e Harvard.

Em 1734 escreveu The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician - Wherin it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith, onde ataca os fundamentos do Cálculo Infinitesimal. O ataque parece ser dirigido contra Edmund Halley, ateu e próximo de Isaac Newton.

Desta obra citamos um dos seus ataques à teoria de Newton:

"And what are these Fluxions? The Velocities of evanescent Increments? And what are these same evanescent Increments? They are neither finite Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the Ghosts of departed Quantities?"

A polémica que alimentou nesta matéria foi muito viva e motivou a procura de fundamentação mais incontroversa para este novo ramos da matemática, que tão boas aplicações manifestou desde sempre.

George Berkeley dedicou-se a vária áreas, nomeadamente filosofia, onde as suas ideias idealistas tiveram grande impacto, e matemática.

Em 1975 surge a International Berkeley Society, que promove os estudos sobre a obra de Berkeley, promovendo investigação e congressos internacionais.

George Berkeley faleceu em Oxford, para onde se mudara para seguir os estudos de seu filho em Christ Church.

NÚMEROS COMPLEXOS

Breve História - Parte II

Amélia Mendes - E. S. José Falcão
Teresa Costa – E.S.Montejunto

Vamos então agora falar um pouco das figuras envolvidas nas descobertas da resolução da cúbica e dos ataques, entre os matemáticos da época renascentista, daí resultantes.

O verdadeiro autor do método para a resolução de equações do 3º grau foi Scipione Ferro(1465-1526), professor universitário de Bolonha. Pouco se sabe sobre a sua vida.

Scipione Ferro nunca publicou a sua descoberta. Sabe-se que ele decidiu, antes da sua morte, revelá-la aos seus discípulos Anniballe Della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na cadeira de matemática em Bolonha) e António Maria Fiore (um aluno pouco brilhante a matemática).

A descoberta ocorreu provavelmente por volta de 1515. Em 1535 Fiore teve a infeliz ideia de desafiar Tartaglia para uma disputa matemática.

Note-se que os duelos intelectuais eram frequentes na época. Eram cercados de ritual, presididos por uma autoridade e muitas vezes assistidos por numerosa audiência. Alguns contratos de professores eram temporários e muitas vezes a permanência na cátedra dependia de um bom desempenho nessas disputas. Isto talvez explique a atitude sigilosa de Ferro, pois era conveniente ter uma “carta na manga” para o caso de necessidade. Divulgar a sua descoberta seria desperdiçar um bom trunfo.

Naquela disputa, Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo, de um modo ou de outro, equações do 3º grau. Tartaglia também fez a sua lista, de natureza bem mais variada do que a de Fiore. A arma de Fiore era a fórmula de Ferro. Tartaglia dispunha do seu sólido conhecimento e da sua inteligência.

Oito dias antes do encontro, depois de longas tentativas, ocorreu a Tartaglia a ideia de como deduzir a fórmula para resolução da equação do 3º grau. Sem dúvida, isto foi uma notável descoberta, mas não tão grande quanto a de Ferro, pois Tartaglia sabia, pelas questões que lhe tinham sido propostas, que uma tal fórmula deveria existir, enquanto que Ferro não tinha essa certeza.

Todos nós sabemos a diferença que isso faz. É a diferença que existe entre resolver um exercício ou demonstrar um novo teorema. Seja como for, Tartaglia resolveu, rapidamente, os 30 problemas de Fiore, tendo ganho a disputa e recusado, magnanimamente, os 30 banquetes estipulados como prémio para o vencedor.

Notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos chegaram a Milão onde vivia o Doutor Girolamo Cardano que ficou muito curioso por saber se e como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível. Cardano usou de todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa e lá, mediante promessa de guardar segredo, obteve deste, em 1539, a regra para resolver a equação do 3.º grau, dada sob a forma de versos um tanto enigmáticos, sem nenhuma indicação de prova.

Depois da visita de Tartaglia, Cardano com algum esforço, conseguiu demonstrar a validade da regra para resolver a equação $x^3 + px = q$.

Note-se que nessa época, em rigor, não havia fórmulas mas sim receitas, explicadas com exemplos numéricos: uma regra para $x^3 + px = q$ outra para $x^3 = px + q$, outra para $x^3 = px^2 + q$, etc..

Cardano era médico, astrónomo, astrólogo, matemático, filósofo, jogador inveterado e um insaciável investigador, cuja curiosidade e interesse por todos os tipos de conhecimentos não tinham limites. Escreveu muitos livros sobre todos estes assuntos, inclusive uma autobiografia.

Tendo conseguido melhorar vários assuntos tratados por Pacioli, Cardano pretendia publicar um livro de álgebra ajudado pelo seu brilhante e fiel discípulo Ludovico Ferrari.

Os estudos de Cardano, feitos com a colaboração de Ferrari (que obteve a solução por radicais da equação do 4º grau), conduziram a importantes avanços na teoria das equações. Todos esses progressos justificavam a publicação de um livro sobre o assunto. Mas isso Cardano estava impedido de fazer em virtude do seu juramento a Tartaglia.

Em 1542, entretanto, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos deixados por Ferro, entre os quais estava o da solução da equação $x^3 + px = q$. O juramento de Cardano proibia-o de publicar a solução de Tartaglia mas não a de Ferro, obtida muito antes. Cardano considera-se desobrigado de qualquer compromisso e volta-se, com energia, para a preparação do seu grande livro "Ars Magna", publicado em 1545.

O aparecimento dessa notável obra foi recebida favoravelmente pelos entendidos mas provocou reacção bem desfavorável por parte de Tartaglia.

Com efeito, no ano seguinte, 1546, Tartaglia publicou os "Quesiti e Inventioni Diverse", onde apresenta soluções para vários problemas que lhe foram propostos, descreve factos autobiográficos e conta a história das suas relações com Cardano, atacando-o asperamente pela quebra do seu juramento. A publicação dos "Quesiti" foi respondida por um panfleto de Ferrari em defesa do seu mestre, o que provocou uma réplica de Tartaglia, iniciando-se desta maneira uma polémica que durou mais de um ano (Fevereiro de 1547 a Junho de 1548) e produziu mais de 12 panfletos, conhecidos como "Cartelli di Sfida Mathematica". O resultado do debate não ficou muito claro mas as autoridades universitárias de Brescia, para onde Tartaglia acabara de se transferir, não ficaram satisfeitas com o seu desempenho e anularam o seu contrato. Regressou a Veneza, onde morreu humilde e esquecido, nove anos depois.

Feita esta narração, vejamos como se resolve a equação do 3º grau.

A equação geral do 3º grau reduz-se à forma

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Fazendo a substituição $x=y-\frac{a}{3}$, vem

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

ou seja

$$y^3+\underbrace{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)}_{p}y+\underbrace{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)}_{q}=0\,.$$

Voltando à variável inicial, *x,* ter-se-á:

$$x^3+px+q=0 \qquad \textbf{(2)}$$

O método consiste em procurar uma solução da forma $x=u+v$. Assim, substituindo em (2), obtemos:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0 \qquad \textbf{(3)}$$

Se conseguirmos obter os números u e v tais que $3uv+p=0$, o termo em $u+v$, na equação (3), desaparece e $x = u + v$ será solução de (2) se

$$uv=-\frac{p}{3} \ \wedge \ u^3+v^3=-q \qquad \textbf{(4)}$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 = -q \ \wedge \ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Ora o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do 2º grau $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$. Utilizando a fórmula clássica de resolução da equação do 2.º grau, obtemos

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Consequentemente

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Então

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \textbf{(5)}$$

Assim $x = u + v$, dada por esta fórmula, é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Recorrendo ao cálculo diferencial, no estudo da variação da função $x \mapsto y = x^3 + px + q$ e fazendo $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, concluímos facilmente que a equação (2) tem:

- uma raiz real e duas complexas conjugadas se $D > 0$;
- tem três raízes reais sendo uma repetida se $D = 0$;
- tem três raízes reais distintas se $D < 0$.

Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Ferro e Tartaglia. Quando $D < 0$, a fórmula exprime $x = u + v$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas.

Torna-se então necessário fazer a ligação entre a solução, *formal e sem significado*, obtida a partir da fórmula de Cardano (onde estavam presentes os imaginários) e as soluções reais (obtidas por inspecção).

Confrontados com estas dificuldades os algebristas italianos e os seus sucessores não hesitaram, no entanto, em calcular sobre números $\sqrt{-a}$, em que a>0, como se estes números existissem, isto é, aplicando-lhes as regras da álgebra com $\sqrt{(-a)^2} = -a$.

Por exemplo, Rafael Bombelli (1526-1572) um algebrista italiano aplica a fórmula de Cardano à equação: $x^3 = 15x + 4$, da qual conhece uma raiz real x=4.

A raiz dada pela fórmula de Cardano escreve-se

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad \textbf{(6)}$$

Bombelli tendo reparado que em (6) os radicandos $2 + \sqrt{-121}$ e $2 - \sqrt{-121}$ apenas diferiam no sinal, decidiu escrever as expressões $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ na forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Como ele conhecia a raiz 4 vem então $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$, donde a=2. Logo

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-b} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-b}\,.$$

Por definição de raiz cúbica vem

$$\left(2 + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121} \Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{b}.\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}\,.$$

Bombelli aplica então a fórmula do binómio de Newton e manipula as expressões obtidas, de acordo com as regras estabelecidas para as variáveis reais e obtém para b o valor 1.

Bombelli mostrou que, na verdade,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4\,.$$

Este acontecimento assinalou o nascimento dos complexos.

Bombelli desenvolveu regras fundamentais de cálculo com números complexos, embora não compreendesse de que números se tratava, por analogia com conhecimentos das regras de cálculo com números reais. Este matemático foi o primeiro a mostrar a importância dos números complexos apesar de não ter contribuído para a resolução de equações do 3º grau, pois sem o conhecimento prévio das soluções o processo não resulta.

Esta persistência em empregar expressões desprovidas de sentido é devida ao facto dos algebristas encontrarem nestes cálculos a possibilidade de obter teoremas gerais, sem terem de distinguir vários casos: uma equação do 2º grau tem sempre ou uma raiz dupla ou então duas raízes simples, reais ou imaginárias. Uma equação do 3º grau com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real (prova pelo método de Stevin) e portanto escreve-se $(x - a)(x^2 + px + q) = 0$ e a soma das multiplicidades das suas raízes é sempre 3 se se admitirem as raízes imaginárias.

PROBLEMA DO MÊS (XXII)

Velocidade de corrida

Pedro Palhares
Universidade do Minho

No problema XX propunha-se um problema em forma de conversa entre um capitão e um amigo. Este problema inventei-o para enviar aos meus amigos na passagem de ano. E o que nessa altura era óbvio, embora implícito, porventura deixou de o ser e nem a indicação 'para este primeiro número do ano construí' permitiu que os leitores inferissem que o ano que se avizinhava era o ano 2010. *Mea culpa*, no último número já deixei essa indicação clara no auxílio do costume. Mas já recebi criticas por deixar indicações criptadas para o problema antes do seu enunciado. E com inteira razão.

Mas passemos então à resolução do problema. A idade das três filhas, multiplicada entre si e pela idade do capitão deverá dar 2010. Comecemos por aqui. 2010, factorizado em números primos, resulta em 2010=2x3x5x67. Então uma possível combinação para as idades é esta precisamente: 2, 3, 5, 67; mas há outras, que não estamos limitados aos primos, vamos sistematizar:

2, 3, 5, 67
1, 1, 30, 67;
1, 2, 15, 67;
1, 3, 10, 67,
1, 5, 6, 67

e uma que pouca gente mencionou, dado ser também pouco credível em termos de idades:

1, 1, 15, 134

A segunda informação diz-nos que a soma das idades das filhas é maior que quinze. Ora isso deixa-nos então com as seguintes possibilidades:

1, 1, 30, 67
1, 2, 15, 67
1, 1, 15, 134

Assim se compreende que o amigo tenha dito que assim não tinha dados que chegasse. Na verdade, com os dados que o capitão lhe deu, e do ponto de vista estritamente numérico, tem três hipóteses. Mas ele está à frente do capitão, e 67 anos não são confundíveis com 134. Se o capitão tivesse 134 anos, o amigo não responderia que não tinha dados antes responderia que as netas tinham 1, 1 e 15. Mas como ele respondeu que não tinha dados, é porque o capitão tem 67 anos, já as netas não se consegue saber.

É aí que o capitão responde que a mais nova se chama Joana. O nome dela é um pouquinho irrelevante, já o facto de haver uma mais nova é uma informação vital que nos permite excluir a hipótese de as netas terem 1, 1 e 30 anos. Ficamos então com uma só das hipóteses e podemos afirmar com segurança que a idade das netas do capitão é de 1, 2 e 15 que a idade do capitão é de 67 anos.

******

No número anterior apresentei um problema que, dizia eu, tinha uma formulação muito simples, perguntando-se apenas se é possível construir uma triângulo que tenha como medidas dos lados $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ (numa unidade a escolher).

Qual a ajuda que posso dar aqui? Bem na verdade, o problema é dos tais que costuma ser referido como um problema mal definido, ou se preferirem, de contornos vagos. Talvez a primeira coisa, seja discutir o que significa ser possível construir. Em matemática muitas vezes esta pergunta é interpretada por não ir contra nenhuma regra matemática. Mas se eu perguntar, 'É possível construir um triângulo equilátero que tenha 10 000 km de comprimento de lado?', a verdade é que na prática eu talvez não consiga construir, embora em teoria seja tão passível de ser construído como um triângulo com 10 cm. Queria aqui que considerassem tanto o aspecto teórico como indicassem como seria construído. E já agora também, porque não pensar, caso seja possível construir, em qual a melhor forma de o fazer?

******

Para este número, seleccionei o seguinte problema:

Um piloto de rally percorreu um troço de 6 km de estrada a 140 Km por hora durante 3 km, a 168 km por hora durante 1, 5 km, e a 210 km por hora durante 1,5 km. Qual foi a sua velocidade média durante os 6 km?

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para *palhares@iec.uminho.pt*, colocando problema do mês como título.

3. Definição. Um conjunto A diz-se uma *parte* de um conjunto S quando todo o elemento de A é também elemento de S. Como esta relação entre um conjunto A e um conjunto S ocorre muito frequentemente no que segue, exprimo-a abreviadamente pelo símbolo $A \subseteq S$, ou por $S \supseteq A$.[25] Por falta de melhor palavra, direi por vezes que S *contém todo* o A para exprimir que entre os elementos de S se encontram os elementos de A. Como, além disso, todo o elemento s de um conjunto S pode, por (2), ser ele próprio encarado como um conjunto, podemos daqui em diante empregar a notação $s \ni S$.[26]

4. Teorema. $A \subseteq A$, por (3).

5. Teorema. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

A prova resulta de (3), (2).

6. Definição. Um conjunto A diz-se uma parte *própria* de S, quando A é parte de S, mas diferente de S ⟦e escrevemos $A \subset S$, ou $S \supset A$⟧. De acordo com (5), S não é, então, parte de A, isto é, existe em S um elemento que não $\in A$.

7. Teorema. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, o que abreviadamente se pode escrever $A \subseteq B \subseteq C$, então $A \subseteq C$, e A é certamente uma parte própria de C se A é uma parte própria de B ou B é uma parte própria de C.

A prova resulta de (3), (6).

8. Definição. O conjunto *união* dos conjuntos A, B, C,... (que será designado por $\bigcup\{A, B, C, ...\}$, ou por $A \cup B \cup C \cup ...$) é o conjunto cujos elementos são determinados pela prescrição seguinte: um ente é considerado como elemento de $\bigcup\{A, B, C, ...\}$ se e só se $\in$ algum dos conjuntos A, B, C,... , isto é, quando $\in A$, *ou* B, *ou* C,... .[27] Inclui-se também o caso em que um só conjunto A é dado; então é óbvio que $\bigcup\{A\} = A$. Observe-se, além disso, que o conjunto $\bigcup\{A, B, C, ...\}$ composto a partir de A, B, C,... deve ser distinguido do conjunto ⟦$\{A, B, C, ...\}$⟧ cujos elementos são os próprios conjuntos A, B, C,... .

9. Teorema. Os conjuntos A, B, C,... são partes de $\bigcup\{A, B, C, ...\}$.

A prova resulta de (8), (3).

---

[25]⟦Dedekind escreve "$A\,\mathfrak{3}\,S$" (em vez de "$A \subseteq S$") e diz que evitará a expressão sinónima "$S\,\mathcal{E}\,A$", mas usa o mesmo símbolo "$\mathfrak{3}$" para designar a relação de pertença. A necessidade de distinguir (conceptual e natacionalmente) pertença e inclusão estava sendo considerada na época, nomeadamente por Frege e Peano, bem como pelo próprio Dedekind, como se mostra em Sinaceur [35]. Evitaremos sistematicamente aquela ambiguidade notacional.⟧

[26]⟦Primeiro, não é implicado por (2) que cada ente seja um conjunto, mas apenas que cada conjunto seja um ente. Segundo, atendendo ao significado anteriormente atribuído ao seu "$s\,\mathfrak{3}\,S$" (isto é, ao nosso $s \subseteq S$) parece-nos que estaria aqui uma fonte evitável de ambiguidades e embaraços.⟧

[27]⟦Dedekind designa a união dos conjuntos A, B, C,… por $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ e diz que ela é *composta* a partir destes conjuntos.⟧

10. Teorema. Se A, B, C,... são partes de um conjunto S, então $\bigcup\{A, B, C, ...\} \subseteq S$.

A prova resulta de (8), (3).

11. Teorema. Se P é parte de um dos conjuntos A, B, C,... , então $P \subseteq \bigcup\{A, B, C, ...\}$.

A prova resulta de (9), (7).

12. Teorema. Se cada um dos conjuntos P, Q,... é parte de um dos conjuntos A, B, C,... , então $\bigcup\{P, Q, ...\} \subseteq \bigcup\{A, B, C, ...\}$.

A prova resulta de (11), (10).

13. Teorema. Se A é uma união de alguns dos conjuntos P, Q,... , então $A \subseteq \bigcup\{P, Q, ...\}$.[28]

Prova. Pois todo o elemento de $A \in$ um dos conjuntos P, Q,... , por (8), logo, também por (8), $\in \bigcup\{P, Q, ...\}$, donde o teorema, por (3).

14. Teorema. Se cada um dos conjuntos A, B, C,... é uma união de alguns dos conjuntos P, Q,... , então $\bigcup\{A, B, C, ...\} \subseteq \bigcup\{P, Q, ...\}$.

A prova resulta de (13), (10).

15. Teorema. Se cada um dos conjuntos P, Q,... , é parte de um dos conjuntos A, B, C,... , e cada um dos primeiros é uma união de alguns dos últimos, então

$$\bigcup\{P, Q, ...\} = \bigcup\{A, B, C, ...\}.$$

A prova resulta de (12), (14), (5).

16. Teorema. Se $A = P \cup Q$ e $B = Q \cup R$, então $A \cup R = P \cup B$.

Prova. Pois, pelo teorema precedente (15), $A \cup R = B \cup P = P \cup Q \cup R$.

17. Definição. Um ente g diz-se um elemento *comum* dos conjuntos A, B, C,... , se pertence a cada um destes conjuntos (isto é, está em A *e* em B *e* em C,...). Analogamente, um conjunto T diz-se uma *parte comum* de A, B, C,... quando T é parte de cada um destes conjuntos; e chamamos *intersecção* dos conjuntos A, B, C,... ao conjunto perfeitamente determinado $\bigcap\{A, B, C, ...\}$ ⟦ou $A \cap B \cap C \cap ...$⟧ que consiste de todos os elementos comuns de A, B, C,... ,[29] e é por conseguinte uma parte comum de todos estes conjuntos. Também aqui incluimos o caso em que só um conjunto A é dado; então $\bigcap\{A\} = A$. Mas pode bem acontecer que os conjuntos A, B, C,... não tenham nenhum elemento comum e, portanto, nenhuma

[28]⟦Não se afiguraria necessário este teorema se fosse afirmado no antecedente que A era a união dos conjuntos P, Q,…, porque então o consequente apenas afirmaria que $\bigcup\{P, Q, \ldots\} \subseteq \bigcup\{P, Q, \ldots\}$, o que é verdade por (4). Esta interpretação, cuja correcção não é inteiramente clara pela redacção original, parece confirmada pelo enunciado do teorema seguinte.⟧

[29]⟦A notação original é “$\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$”, de *Gemeinheit*.⟧

parte comum, nenhuma intersecção; estes serão chamados conjuntos *sem* parte comum, e o símbolo $\bigcap\{A, B, C, ...\}$ carece de significado (comparar com o final de (2)).[30] Todavia, em teoremas sobre intersecções, deixaremos quase sempre ao cuidado do leitor a lembrança da condição da sua existência e a descoberta da interpretação apropriada destes conjuntos no caso de não existência.

18. Teorema. Toda a parte comum de A, B, C,... é parte de $\bigcap\{A, B, C, ...\}$.

A prova resulta de (17).

19. Teorema. Toda a parte de $\bigcap\{A, B, C, ...\}$ é uma parte comum de A, B, C,... .

A prova resulta de (17), (7).

20. Teorema. Se cada um dos conjuntos P, Q,... é parte de um dos conjuntos A, B, C,... , então $\bigcap\{P, Q, ...\} \subseteq \bigcap\{A, B, C, ...\}$.

Prova. Pois todo o elemento de $\bigcap\{P, Q, ...\}$ é elemento comum de P, Q,... , logo é também elemento comum de A, B, C,... , como queríamos demonstrar.

§2.
FUNÇÕES NUM CONJUNTO

21. Definição.[31] Por função ou aplicação φ de um ⟦ou: (definida) num⟧ conjunto S entendemos uma lei de acordo com a qual, a cada elemento determinado s de S está *associado* um ente determinado chamado a *imagem* ⟦*Bild*⟧ de s, que se designa por $\varphi(s)$;[32] também dizemos que $\varphi(s)$ *corresponde* ao elemento s, que $\varphi(s)$ *resulta* ou é *produzido* de s pela aplicação φ, ou que s é *aplicado* em $\varphi(s)$ pela aplicação φ. Se agora T é uma parte qualquer de S, então a aplicação φ de S determina uma aplicação definida em T,[33] que por simplicidade podemos designar pelo mesmo símbolo φ, e que consiste no seguinte: a cada elemento t do conjunto T corresponde a mesma imagem $\varphi(t)$ que t possui como elemento de S; ao mesmo tempo, chamamos imagem de T ao conjunto que consiste de todas as imagens $\varphi(t)$, e designamo-lo por $\varphi[T]$; deste modo, também $\varphi[S]$ fica definido.[34] Como exemplo

---

[30]⟦Já se vê por aqui que Dedeking não admite o conjunto vazio, pois no caso contrário teria de dizer que pressupôs a família $\{A, B, ...\}$ não vazia. Sobre a aceitação do conjunto vazio, a distinção entre elemento e conjunto singular desse elemento e questões semalhantes em foco na época em que o trabalho de Dedekind foi redigido, ver Kanamori [21].⟧

[31]Veja-se Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* terceira edição, 1879, §163.

[32]⟦Dedekind usa o termo "*Abbildung*", cuja tradução literal é "transformação". Subentende-se que se trata de uma aplicação de um conjunto S noutro conjunto, não especificado (mas pode ser o próprio S, como de facto será na maioria dos casos, mas que contém, pelo menos, todas as imagens dos elementos de S.⟧

[33]⟦Esta nova aplicação é chamada a *restrição* de φ a T, que se pode designar por "$\varphi|T$", ou "$\varphi_{|T}$", mas Dedekind designa pelo mesmo símbolo "φ".⟧

[34]⟦Está bem de ver que evitamos a notação usual em matemática, mas inconveniente na teoria dos conjuntos, "$\varphi(S)$" para conjunto imagem (ou conjunto transformado) de S por

de uma aplicação de um conjunto podemos encarar a mera atribuição de símbolos ou nomes aos seus elementos. A aplicação mais simples de um conjunto é aquela pela qual cada elemento é aplicado em si mesmo; será chamada a aplicação *idêntica* ⟦*identidade*⟧ do conjunto. Por conveniência, nos teoremas seguintes (22), (23), (24), que lidam com uma aplicação arbitrária φ de um conjunto arbitrário S, denotaremos as imagens de elementos s e de partes T por s' e T', respectivamente; além disso, convencionamos que letras itálicas minúsculas e maiúsculas sem acentos significarão sempre elementos e partes deste conjunto S.[35]

22. Teorema.[36] Se $A \subseteq B$, então $A' \subseteq B'$.

Prova. Todo o elemento de A' é imagem de um elemento de A, e portanto também de B; é, porconseguinte, elemento de B', como se queria demonstrar.

23. Teorema. A imagem de $\bigcup\{A, B, C, ...\}$ é $\bigcup\{A', B', C', ...\}$.

Prova. Se designarmos o conjunto $\bigcup\{A, B, C, ...\}$ (que, por (10), também é parte de S) por M, então todo o elemento da sua imagem M' é a imagem m' de um elemento m de M; como, por (8), m é também elemento de um dos conjuntos A, B, C,... e por conseguinte m' pertence a um dos conjuntos A', B', C',... e portanto também é elemento de $\bigcup\{A', B', C', ...\}$, tem-se, por (3),

$$M' \subseteq \bigcup\{A', B', C', ...\}.$$

Por outro lado, como A, B, C,... são, por (9), partes de M, e portanto A', B', C',... são, por (22), partes de M', temos por (10)

$$\bigcup\{A', B', C', ...\} \subseteq M'.$$

Combinando com acima temos, por (**5**), o teorema que se queria demonstrar

$$M' = \bigcup\{A', B', C', ...\}.$$

24. Teorema.[37] A imagem de toda a parte comum de A, B, C,... e, portanto, da intersecção $\bigcap\{A, B, C, ...\}$, é parte de $\bigcap\{A', B', C', ...\}$.

Prova. Por (22), a imagem de qualquer parte comum de A, B, C,... é parte comum de A', B', C',... , e o teorema resulta por (18).

25. Definição e teorema. Se φ é uma aplicação de um conjunto S, e ψ uma aplicação da imagem $S' = \varphi[S]$, então existe sempre a aplicação θ de S

φ. A razão da inconveniência é que, na teoria geral dos conjuntos, não é impossível um conjunto ser simultaneamente membro e parte de outro conjunto.⟧

[35]⟦Quer dizer, portanto, que $s' = \varphi(s)$ e $T' = \varphi[T]$. Se φ é uma aplicação de S em A escrevemos, como é usual fazer-se, $\varphi : S \to A$, e dizemos que φ aplica S em A.⟧

[36]V. teorema 27.

[37]V. teorema 29.

composta[38] de φ e ψ, que consiste no seguinte: a cada elemento s de S corresponde a imagem

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s)),$$

onde de novo $\varphi(s) = s'$. Esta aplicação θ pode-se designar abreviadamente por $\psi \cdot \varphi$ ou $\psi\varphi$ $[\![\psi \circ \varphi]\!]$, e a imagem $\theta(s)$ por $\psi\varphi(s)$, onde é de ter em conta a ordem dos símbolos φ, ψ pois, em geral, o símbolo $\psi\varphi$ não tem interpretação e na realidade só tem significado quando $\psi[S'] \subseteq S$. Se agora χ é uma aplicação do conjunto $\psi[S'] = \psi\varphi[S]$ e η a aplicação do conjunto S' composta de ψ e χ, então $\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s)$; portanto, as aplicações compostas $\chi\theta$ e $\eta\varphi$ coincidem em todo o elemento s de S, isto é, $\chi\theta = \eta\varphi$. De acordo com o significado de θ e η este teorema pode exprimir-se convenientemente na forma

$$\chi \cdot \psi\varphi = \chi\psi \cdot \varphi,$$

e esta aplicação composta de φ, ψ e χ pode designar-se abreviadamente por $\chi\psi\varphi$.

§3.
INJECTIVIDADE DE UMA APLICAÇÃO. CONJUNTOS EQUIPOTENTES

26. Definição. Uma aplicação φ definida num conjunto S diz-se *injectiva*[39] quando a elementos diferentes a, b do conjunto S correspondem sempre imagens diferentes $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$. Como, neste caso, se $s' = t'$ então $s = t$, todo o elemento do conjunto $S' = \varphi[S]$ é imagem s' de um único e perdeitamente determinado elemento s do conjunto S, e podemos portanto contrapor à aplicação φ definida em S uma aplicação *inversa* definida no conjunto S', a designar por $\overline{\varphi}$ $[\![$ou $\varphi^{-1}]\!]$ que consiste no seguinte: a cada elemento s' de S' corresponde a imagem $\overline{\varphi}(s') = s$ $[\![= \varphi^{-1}(s')]\!]$; obviamente, esta aplicação também é injectiva. É claro que $\overline{\varphi}[S'] = S$, que, além disso, φ é a inversa de $\overline{\varphi}$, e que a aplicação $\overline{\varphi}\varphi$ composta de φ e $\overline{\varphi}$, por (25), é a aplicação identidade de S (21). Obtêm-se de imediato os seguintes resultados adicionais ao §2, na notação aí estabelecida:

27. Teorema.[40] Se $A' \subseteq B'$, então $A \subseteq B$.

Prova. Se $a \in A$, então $a' \in A'$, logo também $a' \in B'$, portanto $a' = b'$ para certo elemento b de B; mas como de $a' = b'$ resulta sempre $a = b$, todo o elemento de A é também elemento de B, como se queria demonstrar.

28. Teorema. Se $A' = B'$, então $A = B$.

A prova resulta de (27), (4) e (5).

---

[38]Não será de recear uma confusão entre esta composição de aplicações e a composição $[\![$união$]\!]$ de conjuntos.
[39]$[\![$Dedekind utiliza os termos "*similar* $[\![$*ähnlich*$]\!]$ ou *distinta*".$]\!]$
[40]V. teorema 22.

29. Teorema.[41] Se $G = \bigcap\{A, B, C, ...\}$, então $G' = \bigcap\{A', B', C', ...\}$.

Prova. Todo o elemento de $G' = \bigcap\{A', B', C', ...\}$ pertence certamente a S', e portanto é imagem g' de um elemento de S; mas como g' é elemento comum de A', B', C',... , então por (27) g tem de ser elemento comum de A, B, C,... , logo $g \in G$; portanto, todo o elemento de $\bigcap\{A', B', C', ...\}$ é imagem de um elemento g de G, portanto elemento de G', isto é, $\bigcap\{A', B', C', ...\} \subseteq G'$ e o nosso teorema sai de (24), (5).

30. Teorema. A aplicação identidade de um conjunto é sempre injectiva.

31. Teorema. Se φ é uma aplicação injectiva definida em S e ψ é uma aplicação injectiva definida em $\varphi[S]$, então a aplicação $\psi\varphi$ definida em S, composta de φ e ψ, é injectiva, e a inversa associada é $\overline{\psi\varphi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi}$ $[\![(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}]\!]$.

Prova. Pois a diferentes elementos a, b de S correspondem diferentes imagens $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, e a estas novamente diferentes imagens $\psi(a') = \psi\varphi(a)$, $\psi(b') = \psi\varphi(b)$. Então $\psi\varphi$ é uma função injectiva. Além disso, todo o elemento $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ do conjunto $\psi\varphi[S]$ é aplicado por $\overline{\psi}$ em $s' = \varphi(s)$ e este em s por $\overline{\varphi}$, logo $\psi\varphi(s)$ é aplicado em s por $\overline{\varphi}\,\overline{\psi}$, como se pretendia mostrar.

32. Definição. Os conjuntos R, S dizem-se *equipotentes* quando existe uma função injectiva φ definida em S tal que $\varphi[S] = R$, e portanto $\overline{\varphi}[R] = S$.[42] Obviamente, por (30), todo o conjunto é equipotente a si próprio.

33. Teorema. Se R, S são conjuntos equipotentes, então todo o conjunto Q equipotente a R também é equipotente a S.

Prova. Pois se φ, ψ são aplicações injectivas definidas em S, R, respectivamente, tais que $\varphi[S] = R$, $\psi[R] = Q$, então por (31) $\psi\varphi$ é uma função injectiva em S tal que $\psi\varphi[S] = Q$, como se queria provar.

34. Definição. Podemos por conseguinte separar todos os conjuntos em *classes* pondo numa determinada classe todos e somente aqueles conjuntos Q, R, S,... que são equipotentes a um dado conjunto R, chamado o *representante* da classe; de acordo com (33), a classe não é alterada se nela tomarmos como representante qualquer outro conjunto.

35. Teorema. Se R, S são conjuntos equipotentes, então toda a parte de S é também equipotente a uma parte de R, e toda a parte própria de S é também equipotente a uma parte própria de R.

Prova. Pois se φ é uma função injectiva em S, $\varphi[S] = R$, e $T \subseteq S$, então por (22) o conjunto equipotente a T, $\varphi[T] \subseteq R$; se, além disso, T é uma parte própria

[41] V. teorema 24.

[42] $[\![$Como aplicação de S em $\varphi[S] = R$, φ é não apenas injectiva mas também *sobrejectiva* e, portanto, *bijectiva*. Assim, podemos dizer que R, S são equipotentes se e só se existe uma bijecção $\varphi : S \to R$, o que se pode abreviar escrevendo “$R \sim S$” (ou “$S \sim R$”).$]\!]$

de S, e s é um elemento de S não em T, então por (27) o elemento $\varphi(s)$ de R não pode estar em $\varphi[T]$; portanto, $\varphi[T]$ é uma parte própria de R, como se queria provar.

§4.
APLICAÇÃO DE UM CONJUNTO EM SI PRÓPRIO

36. Definição. Se φ é uma função injectiva ou não injectiva num conjunto S, e $\varphi[S] \subseteq Z$, então φ diz-se uma aplicação de S em Z ⟦$\varphi : S \to Z$⟧, e dizemos que S é aplicado por φ em Z. Por conseguinte dizemos que φ é uma aplicação do conjunto S em *si próprio* quando $\varphi[S] \subseteq S$, e nesta secção propomos investigar as leis gerais de uma tal aplicação φ. Ao fazê-lo utilizamos as mesmas notações que no §2 e pomos novamente $\varphi(s) = s'$, $\varphi[T] = T'$. Por (22), (7) estas imagens s', T' são elas próprias elementos e partes de S, respectivamente, como aliás todos os entes designados por letras itálicas.

37. Definição. K diz-se uma *cadeia* ⟦*Kette*⟧ quando $K' \subseteq K$.[43] Observemos expressamente que esta designação não se refere à parte K do conjunto S mas sim à aplicação particular φ; com respeito a outra aplicação do conjunto S em si próprio, K já pode não ser uma cadeia.

38. Teorema. S é uma cadeia.

39. Teorema. A imagem K' de uma cadeia K é uma cadeia.

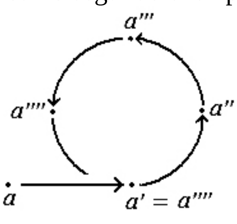
Prova. Pois de $K' \subseteq K$ resulta, por (22) que $(K')' \subseteq K'$, como se devia provar.

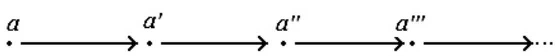
40. Teorema. Se A é parte de uma cadeia K, então também $A' \subseteq K$.

Prova. Pois de $A \subseteq K$ resulta por (22) que $A' \subseteq K'$, e como por (37) $K' \subseteq K$, vem $A' \subseteq K$, por (7), como se queria demonstrar.

---

[43]⟦Esta noção de «cadeia» não tem designação correspondente na terminologia moderna, mas corresponde apenas à noção de que K é fechado para φ: $\varphi(k) \in K$ sempre que $k \in K$. Por outro lado, o termo «cadeia» reserva-se modernamente para uma parte totalmente ordenada de um conjunto parcialmente ordenado. Acontece, porém, que esta última acepção está muito próxima das utilizações do conceito de "cadeia" que Dedekind tem em mente, nomeadamente, quando a função φ é injectiva e K é um conjunto de números naturais. Os diagramas seguintes ilustram casos típicos de cadeias (com φ injectiva no segundo exemplo):





⟧.

41. Teorema. Se a imagem A' é parte de uma cadeia L, então existe uma cadeia K que satisfaz as condições $A \subseteq K$, $K' \subseteq L$; e $A \cup L$ é uma tal cadeia K.

Prova. Pondo realmente $K = A \cup L$ vem logo, por (9), e fica satisfeita a primeira condição $A \subseteq K$. Como além disso, por (23), $K' = A' \cup L'$ e, por hipótese, $A' \subseteq L$, $L' \subseteq L$, vem por (10) a outra condição $K' \subseteq L$, donde resulta, porque $L \subseteq K$, por (9), que $K' \subseteq K$, isto é, que K' é uma cadeia, como se queria provar.

42. Teorema. Um conjunto M que seja uma união de cadeias A, B, C,... é uma cadeia.

Prova. Como $M' = \bigcup\{A', B', C', ...\}$, por (23), e $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $C' \subseteq C$,... por hipótese, vem por (12) que $M' \subseteq M$, como se queria provar.

43. Teorema. A intersecção G de cadeias A, B, C,... é uma cadeia.

Prova. Como, por (17), $G = \bigcap\{A, B, C, ...\}$ é parte comum das cadeias A, B, C,... , por (22) G' é a parte comum de A', B', C',... , e, por hipótese, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $C' \subseteq C$,... , então por (7) G' também é parte comum de A, B, C,... e portanto, por (18), é também parte de G, como se queria provar.

44. Definição. Se $A \subseteq S$, designamos por A_O a intersecção de todas aquelas cadeias (por exemplo, S) de que A é parte ⟦$A_O = \bigcap\{K : K$ é uma cadeia e $A \subseteq K\}$[44]⟧; esta intersecção A_O existe (17) porque o próprio A é parte comum de todas aquelas cadeias. Como, além disso, por (43), A_O é uma cadeia, chamamos a A_O a *cadeia do conjunto* A, ou abreviadamente a *cadeia de* A. Esta definição também se refere estritamente à aplicação fundamental φ do conjunto S em si próprio, e se for necessário, mais adiante, por necessidade de clareza, utilizaremos o símbolo $\varphi_O(A)$ em vez de A_O, e de igual modo designamos a cadeia de A correspondente a outra aplicação ω por $\omega_O(A)$. Para esta noção deveras importante são válidos os seguintes teoremas.

45. Teorema. $A \subseteq A_O$.

Prova. Pois A é parte comum de todas aquelas cadeias cuja intersecção é A_O, donde segue o teorema, por (18).

46. Teorema. $(A_O)' \subseteq A_O$.

Prova. Pois, por (44), A_O é uma cadeia (37).

47. Teorema. Se A é uma parte de uma cadeia K, então $A_O \subseteq K$.

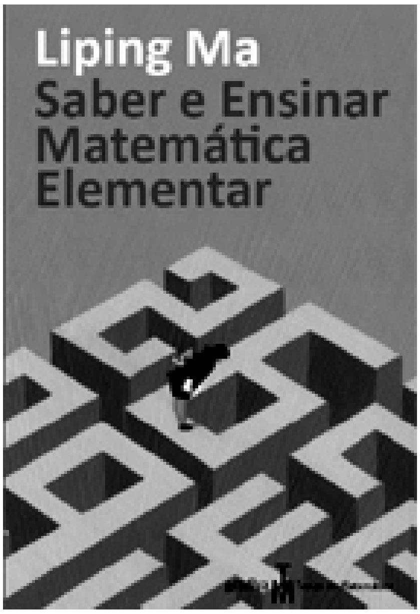
Prova. Pois A_O é a intersecção e portanto também uma parte comum de todas as cadeias K que contêm A.

---

[44]⟦Por outras palavras, A_O é o mais pequeno subconjunto de S fechado para φ e contendo A.⟧

S*obre* Saber e Ensinar Matemática Elementar *de Liping Ma*

Carlos Pereira dos Santos
ISEC

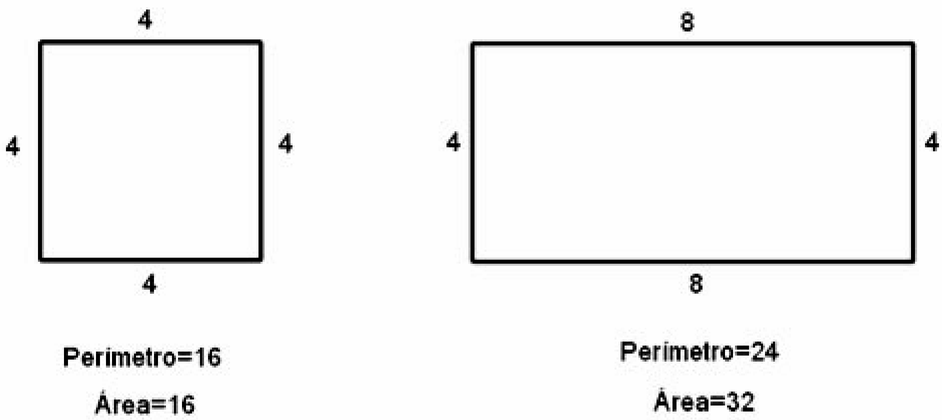


Este é o quinto artigo de uma série de cinco sobre o livro da investigadora chinesa Liping Ma, Saber e Ensinar Matemática Elementar. Este livro, o oitavo da colecção "Temas de Matemática", uma iniciativa conjunta da Gradiva e da Sociedade Portuguesa de Matemática, trata de temas recorrentes na prática docente dos primeiros anos. O livro não se baseia num largo questionário mas sim em quatro perguntas muito bem escolhidas e numa selecção de respostas impulsionadora de uma análise muitíssimo rica.

A Questão sobre Áreas e Perímetros

Tema: Reacção Face a um Tópico Inesperado Trazido por um Aluno.

Imagine que uma das suas alunas chega à aula bastante excitada. Ela diz-lhe que descobriu uma teoria que você nunca tinha ensinado à turma. Explica ter descoberto que, quando o perímetro de uma figura fechada aumenta, a área também aumenta. Mostra um desenho para ilustrar a sua ideia:



O que diria a esta aluna?

Base Conceptual

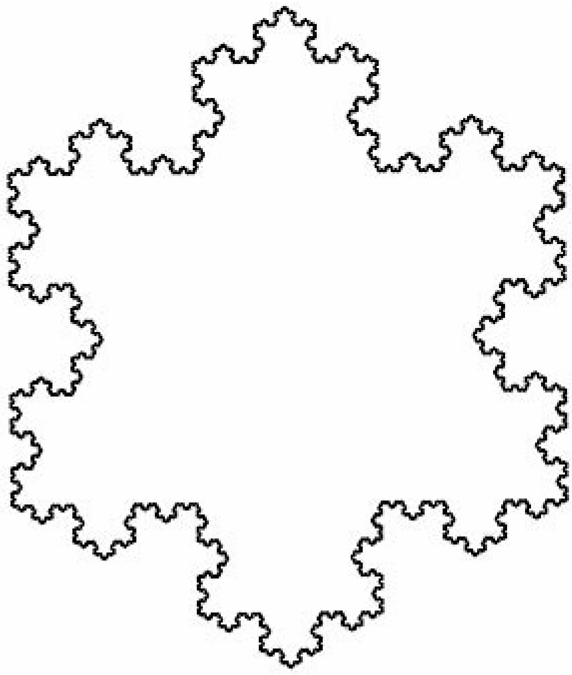
Esta questão é muito interessante e é de certa maneira não-standard. A chave da questão reside no facto da relação entre área e perímetro de uma figura não ter tratamento matemático simples, não sendo proporcional.

Considere-se os dois países fronteiros Chile e Bolívia. O primeiro tem uma área de 756950 Km2 e o segundo uma área de 1098950 Km2. No entanto, basta uma observação do mapa da América do Sul para ver que quanto ao perímetro, o Chile é muito mais competitivo!

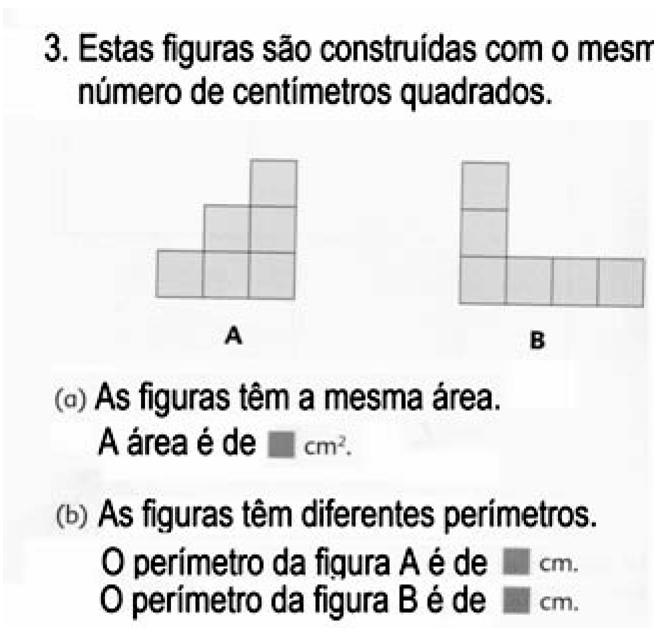
O carácter alongado da sua forma faz com que tenha uma área pequena e uma fronteira grande.

Imagine o leitor que tem um quadrado 4x4, tal como a menina indicou. A sua área e o seu perímetro igualam 16. Se quisermos ter um rectângulo com área menor e perímetro maior podemos utilizar uma estratégia simples: consideramos por exemplo dois lados paralelos com medida 1000. Em seguida, *utilizamos a segunda dimensão* para diminuir substancialmente a área. Se tomarmos para o outro par de lados paralelos segmentos de medida 0,001, ficamos com um rectângulo com perímetro 2000,002 e área igual a 1. Em conclusão, a segunda dimensão pode "anular" o efeito da primeira. Podemos ter um quintal com uma cerca enorme onde não caiba sequer uma cenoura!

Na geometria fractal este conceito é muito bem entendido. Podemos ter figuras com perímetro infinito e área finita!



É possível ver-se o cuidado com este conceito em livros elementares. Eis um exemplo de Singapura num livro dos primeiros anos.



3. Estas figuras são construídas com o mesmo número de centímetros quadrados.

A

B

(a) As figuras têm a mesma área.
A área é de ■ cm².

(b) As figuras têm diferentes perímetros.
O perímetro da figura A é de ■ cm.
O perímetro da figura B é de ■ cm.

Outro exemplo pode ser encontrado em Portugal no livro *Ciência a Brincar: Descobre a Matemática.* Com uma pequena folha de papel, uma menina criou uma tira capaz de envolver a sua turma inteira.

Algumas Respostas de Professores Chineses

a)«A asserção da aluna não é verdadeira. Eu não diria nada, mas mostraria à aluna um contra-exemplo. Por exemplo, por baixo do seu quadrado (com lados de 4 cm), posso desenhar um rectângulo com comprimento de 8 cm e largura de 1 cm. Ela depressa irá perceber que a minha figura tem um perímetro maior, mas área menor do que a dela. Portanto, sem nada dizer, a sua asserção está errada.»

b)«Primeiro elogiá-la-ei pelo seu pensamento independente. Mas também a farei saber que pode haver duas outras situações. Por exemplo, quando o perímetro aumenta, a área pode aumentar, mas também pode diminuir, ou mesmo permanecer igual. Então mostrar-lhe-ei um exemplo de cada caso para comparar com o seu rectângulo (com comprimento de 8 cm e largura de 4 cm).»

c)«É óbvio que em alguns casos a asserção é verdadeira, mas noutros não. Porém, quando é que é verdadeira e quando é que não? Por outras palavras, sob que condições é verdadeira, e sob quais não o é? É melhor termos uma ideia clara sobre o assunto. Para clarificar as condições específicas que originam as várias possibilidades, podemos primeiro investigar as condições que irão provocar o aumento no perímetro, e explorar como estas condições afectam a área.»

d)A solução que alguns professores alcançaram foi: quando o aumento no perímetro de um rectângulo é causado pelo aumento só do comprimento ou só da largura ou de ambos, a área da figura irá aumentar consequentemente; mas quando o aumento no perímetro é causado por um aumento do comprimento e uma diminuição da largura, ou vice-versa, a área não aumentará necessariamente. Portanto, podemos dizer agora que a asserção da aluna não está absolutamente errada, mas está incompleta ou condicional. Sob certas condições é sustentável, mas sob outras não se verifica necessariamente.

e)«Imaginem como é que a área de uma figura muda quando o seu perímetro muda. Por exemplo, quando o comprimento aumenta mas a largura permanece a mesma, haverá uma área extra expandindo-se horizontalmente a partir da original. Por outro lado, quando a largura aumenta mas o comprimento se mantém o mesmo, haverá uma área extra expandindo-se verticalmente a partir da original. Se ambos, comprimento e largura, aumentarem ao mesmo tempo, a área original expandir-se-á em ambas as direcções. Em qualquer destes casos, a área original continua lá mas alguma área extra foi-lhe acrescentada. Podemos desenhar figuras para ilustrar os casos. De facto, isto também pode ser provado usando a propriedade distributiva. Por exemplo, quando o comprimento aumenta 3 cm, passa a (a + 3) cm. A área será (a + 3) b = ab + 3b.»

Notas Finais

a) A questão utilizada pela Liping Ma é interessante e pode ser utilizada para iniciar uma discussão a nível elementar sobre os conceitos de área e perímetro;

b) A questão também serviu para avaliar a **atitude** dos professores face a uma questão deste género. Os professores orientais mostraram ser capazes de **parar para pensar**, apresentar **contra-exemplos**, e demostrar na prática a sua **autonomia face a um problema**.

c) Além do resto, os professores orientais mostraram ser capazes de **estudar a situação com os alunos**, mostraram ser capazes de **generalizar** e fazer **restrições**. Algo interessante nas suas respostas diz respeito à sua capacidade de **propor novos problemas**. São exactamente estas capacidades que fazem com que estes professores sejam capazes de aproveitar respostas e sugestões de alunos para reforçar as suas aprendizagens.

d) São exactamente os tópicos listados no ponto c) aqueles que são mais difíceis de observar nos professores americanos (e portugueses). É uma raridade observar em Portugal professores com esta atitude face a um problema matemático não-standard…

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Distância do Navio à Costa - (Tales de Mileto)

Helder Pinto

Conteúdos: proporções, semelhança e congruência de triângulos.

Material: no caso de se pretender efectuar a actividade prática indicada no final, são necessárias duas varas formando um ângulo recto, duas varas que permitam formar um ângulo variável e uma fita métrica.

O critério de congruência de triângulos "ângulo-lado-ângulo" é atribuído a Tales de Mileto por Eudemo de Rodes, visto que, segundo ele, Tales teria utilizado este critério para determinar a distância de navios à costa. O modo como Tales terá determinado a distância de um navio à costa pode não ser seu, mas as afirmações atribuídas a Eudemo levam "a supor que Tales terá sido o primeiro a justificá-lo"[1].

Tales de Mileto é o primeiro grande matemático da Grécia antiga ao qual são ainda atribuídos, tradicionalmente, os seguintes resultados:

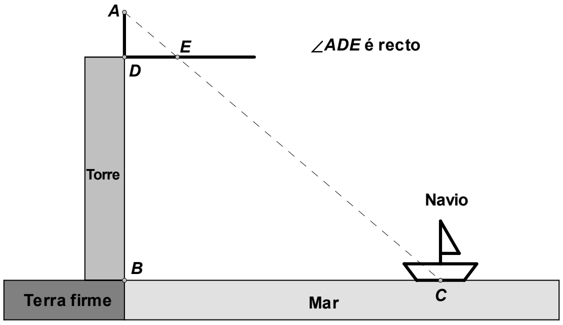
- o círculo é bissectado por qualquer um dos seus diâmetros;
- os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são iguais;
- ângulos verticalmente opostos são iguais;
- ângulos inscritos numa semi-circunferência são iguais.

O modo como Tales, na primeira metade do século VI a.C., terá descoberto a distância de um navio à costa tem sido alvo de diferentes conjecturas ao longo dos anos, dado que não existe nenhum registo totalmente claro sobre os processos por si

utilizados[2]. Existem no entanto algumas conjecturas quanto aos métodos utilizados por Tales – as que se apresentam a seguir são apresentadas por T. Heath, um importante historiador da matemática grega.

[1] Estrada, *História da Matemática*, pág. 228.

[2] Aliás, para se perceber melhor a dificuldade dos historiadores, observe-se o modo como as afirmações de Eudemo de Rodes chegaram aos nossos dias: "Um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo de Rodes (viveu por volta de 320 a. C.) escreveu uma história da matemática. Essa perdeu-se, mas antes de desaparecer alguém resumiu ao menos parte dela. O original desse resumo também se perdeu, mas, durante o quinto século da nossa era, informação extraída do sumário foi incorporada pelo filósofo neoplatónico Proclo (410 - 485) nas páginas iniciais de seu *Comentário sobre o primeiro livro de Os elementos de Euclides*" (Boyer, *História da Matemática*, pág. 32).



Na conjectura mais usual, Tales terá observado um navio do alto de uma torre situada na costa e usado a proporcionalidade existente entre os lados de dois triângulos rectângulos semelhantes.

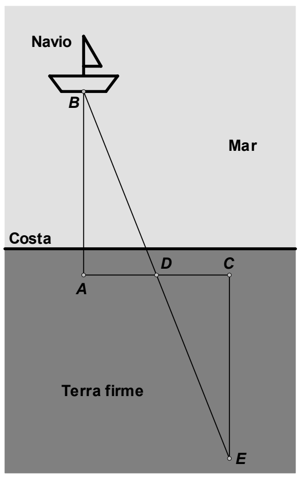
Nesta situação, Tales apenas necessitava de ter, no topo da torre, um instrumento com duas "pernas" formando um ângulo recto. De seguida colocava a "perna" $[AD]$ verticalmente na direcção do ponto B e a outra perna em direcção ao navio do qual se pretende calcular a distância (ver figura acima). De seguida, observava o navio a partir do ponto A e determinava o ponto E que é a intersecção da linha de visão do observador com a "perna" horizontal do instrumento considerado.

Exercício 1: Mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes e que a distância do navio à costa é dada por

$$\left(\overline{AD}+\overline{DB}\right)\cdot\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Repara que os comprimentos dos segmentos de recta $[AD]$, $[DE]$ e $[DB]$ podem ser facilmente medidos – os dois primeiros directamente por se tratarem de comprimentos efectivamente pequenos e o terceiro utilizando, por exemplo, a ajuda de uma corda esticada – e, portanto, este método fornece "uma boa regra prática", ou seja, é um processo rápido e eficaz que permite determinar a distância de um qualquer navio à costa.

A grande objecção a este processo ter sido utilizado por Tales consiste no facto de não ser necessário utilizar o critério de congruência de triângulos "ângulo-lado-ângulo" como conjecturava Eudemo de Rodes.



Veja-se outro processo que poderá ter sido utilizado por Tales.

Seja B o ponto onde se encontra o navio. Fixe-se um ponto A em terra firme (por exemplo, com uma estaca fixa no chão) a partir do qual se irá medir a distância ao navio. Seja C um outro ponto de tal modo que o segmento de recta $[AC]$ seja perpendicular ao segmento $[AB]$ (o segmento $[AC]$ deverá estar completamente em terra firme). Marque-se ainda o ponto D, o ponto médio do segmento $[AC]$.

Construa-se, de seguida, o segmento de recta $[CE]$ de tal modo que este seja perpendicular a $[AC]$ e que os pontos B, D e E estejam todos alinhados entre si.

Seja C um outro ponto de tal modo que o segmento de recta $[AC]$ seja perpendicular ao segmento $[AB]$ (o segmento $[AC]$ deverá estar completamente em terra firme). Marque-se ainda o ponto D, o ponto médio do segmento $[AC]$. Construa-se, de seguida, o segmento de recta $[CE]$ de tal modo que este seja perpendicular a $[AC]$ e que os pontos B, D e E estejam todos alinhados entre si.

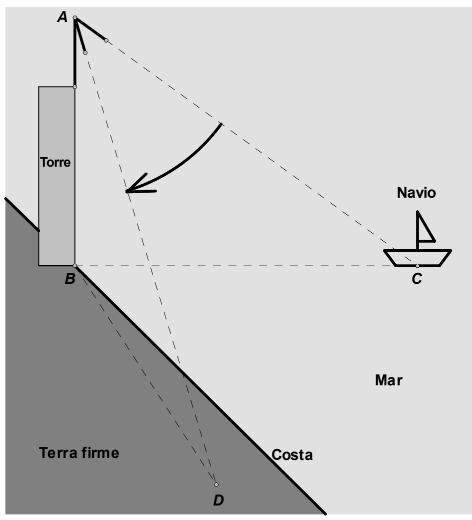
Exercício 2: Mostra que os triângulos $[DAB]$ e $[DCE]$ são iguais e que a distância do navio ao ponto A é igual a $\overline{CE}$.

Repara que o comprimento do segmento de recta $[CE]$, apesar de poder ser muito grande, é medido facilmente pois este segmento encontra-se todo em terra firme.

Este processo utiliza, de facto, o critério de congruência de triângulos "ângulo-lado-ângulo" como conjecturava Eudemo de Rodes, mas tem como principal objecção o facto de este processo não ser uma boa "regra prática". Como é fácil de constatar, são poucas as situações em que o espaço disponível em terra firme é suficientemente extenso e propício para se poder efectuar as construções e as medições que este método propõe.

Um outro possível procedimento para calcular a distância de um navio à costa, a partir de uma torre, seria utilizar um instrumento consistindo numa vara à qual estava articulado um ponteiro que era possível fixar, de modo a construir qualquer ângulo que se desejasse (teria um funcionamento similar ao de um compasso).

A vara seria então colocada em posição vertical no cimo da torre. O ponteiro seria apontado em direcção ao navio pretendido e, de seguida, o ângulo formado pela vara e pelo ponteiro seria fixado.



O observador da torre rodaria então o instrumento,formado pela vara e pelo ponteiro, de modo a que o ponteiro apontasse para um ponto em terra firme (o caminho, em linha recta, desde a torre até este ponto deveria ser todo em terra firme).

Exercício 3: Mostra, a partir dos dados da figura anterior, que os triângulos $[ABC]$ e $[ABD]$ são iguais e que a distância do navio à costa é igual a $\overline{BD}$.

Mais uma vez, repara que o comprimento do segmento de recta $[BD]$, apesar de poder ser muito grande, é medido facilmente pois este segmento encontra-se todo em terra firme.

Este processo utiliza o critério de congruência de triângulos "ângulo-lado-ângulo", como conjecturava Eudemo de Rodes e, como "regra prática", é bastante melhor que o processo anterior. Para além dos pontos considerados nesta situação serem bastante mais fáceis de marcar (de facto, apenas tem de se marcar um único ponto), a obtenção do caminho rectilíneo necessário para medir a distância do navio é muito mais fácil de conseguir, visto que se podem escolher vários pontos em terra firme.

Actividade Prática:

Escolhe, com a ajuda do teu professor de Matemática, um objecto que esteja inacessível (por exemplo, um barco no mar ou um local na outra margem de um rio) e determina, por um dos três processos aqui apresentados, a sua distância a um determinado ponto fixo – o método a utilizar deve ser aquele que melhor se adequa à situação real escolhida. Elabora um pequeno relatório onde expliques todos os teus procedimentos e indiques todas as medições e cálculos efectuados.

Guião do professor:

Exercício 1:

Os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são ambos rectângulos e têm um outro ângulo comum $\left(\angle DAE\right)$. Logo, os dois triângulos são semelhantes (critério "ângulo-ângulo") e, portanto, verifica-se que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{BC}}\text{, ou seja, } \overline{BC} = \left(\overline{AD}+\overline{DB}\right)\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

Exercício 2:

Os triângulos $[DAB]$ e $[DCE]$ são ambos rectângulos e verifica-se ainda que os ângulos $\angle ADB$ e $\angle CDE$ são iguais (ângulos verticalmente opostos). Por outro lado, como D é o ponto médio do segmento $[AC]$, tem-se que $\overline{AD} = \overline{DC}$. Logo, pelo critério "ângulo-lado-ângulo", os triângulos $[DAB]$ e $[DCE]$ são iguais e, portanto, a distância do navio ao ponto A é igual a $\overline{CE}$.

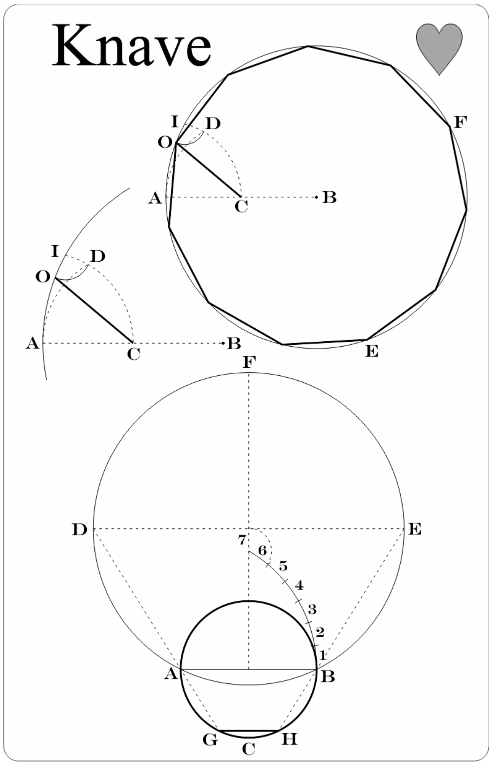
Exercício 3:

Os triângulos $[ABC]$ e $[ABD]$ são rectângulos e têm um outro ângulo comum ($\angle BAD$ é obtido através da rotação do ângulo $\angle BAC$). Por outro lado, como os dois triângulos possuem o lado correspondente comum (segmento de recta $[AB]$), tem-se que os triângulos $[ABC]$ e $[ABD]$ são iguais. Logo, a distância do navio à costa é igual a $\overline{BD}$.

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Marisa Ferreira

Valete de copas



Com o Valete de Copas, Descartes conclui o naipe de Copas e apresenta-nos duas *Proposições*, também relacionadas com a construção de polígonos inscritos em círculos:

Proposição VI: *Numa circunferência dada inscrever um hendecágono.*

Proposição VII: *Numa circunferência dada inscrever um polígono.*

Índice