Ano 25º Lisboa, Novembro 2009 Nº 280

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email
jme@spm.pt

PUBLICAÇÃO MENSAL

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva

Preço: ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Acaba de ser reeditada a obra ***História das Matemáticas na Antiguidade***, de Fernando de Vasconcellos. Este livro, cuja primeira edição data de 1925, é um texto de grande qualidade, como atesta o elogio que lhe concedeu Gomes Teixeira. Ficamos a dever a cuidada edição e coordenação a Augusto Franco de Oliveira. Ver página 13.

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 Lisboa
Tel. 217 939 785

Galeria de Matemáticos

Antonieta Constantino

Al-Khwarizmi

(780? - 850)

Introdução

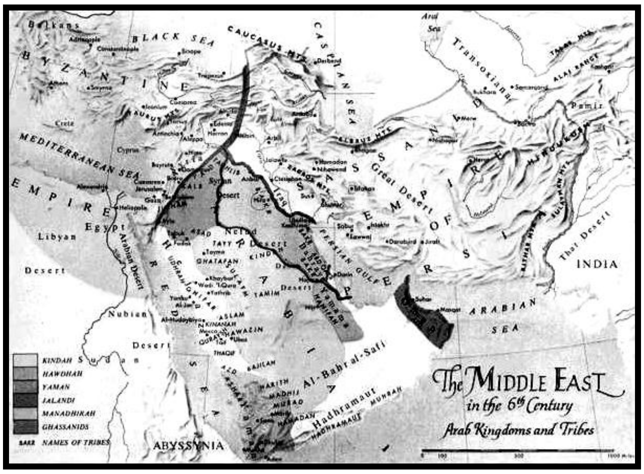
No séc. VII, os países árabes conheceram um desenvolvimento extraordinário.

No ano de 622 Muhammad, fundador do Islão[1], viu-se obrigado a fugir de Mecca e refugiar-se em Yatrib, actual Al-Madīna (المدينة). Esta forma de monoteísmo chamada Islão, foi-se desenvolvendo a partir das classes sociais mais baixas, em oposição ao

[1] ***Islão*** – *significa* ***"submissão"*** *em relação a Allah.*

politeísmo das classes dominantes. Aqui, em Yatrib, Muhammad foi reconhecido pelos seus seguidores como o Profeta de Allah, e o ano de 622 foi declarado como o primeiro ano da era islâmica do novo calendário mulçulmano. Em 630 regressa a Mecca como vencedor, onde virá a morrer dois anos mais tarde.

Os califas[2], ou seja, os sucessores do Profeta, iniciaram uma série de conquistas, tanto para Este, como para Oeste, propagando o Islão. Em menos de um século conseguiram conquistar um imenso território. A sua primeira capital fundada em 635, foi Damasco, tendo sido transferida para Bagdad em 722.



Assimilando rapidamente as concepções intelectuais dos habitantes dos países conquistados, iniciaram a construção de uma nova cultura, em comum com os sírios, os persas e os judeus.

Na época, o desenvolvimento da ciência era fortemente impulsionado pelas necessidades que o comércio fazia surgir, sendo que as relações comerciais se estendiam à India, à China, a Bizâncio, à Russia e a todos os países ao longo do Mediterrânio.

O primeiro grande centro científico do califado foi Bagdad, tendo sido reunidos nesta cidade, agora capital, todos os que trabalhavam nas várias escolas científicas activas, onde para além da filosofia aristotélica, se ensinava ciências naturais, matemática, medicina, etc. Alguns califas, como al-Mansūr (754-775) e Hārūn-ar-Rašīd (786-809)[3], encorajavam o desenvolvimento das ciências naturais e da Matemática, e uma grande biblioteca foi fundada no reinado de Hārūn-ar-Rašīd. Um pouco mais tarde, o califa al-Ma'mūn (813-833), cria uma Academia, Bayt al-Hikma (Casa da Sabedoria), onde reune todos os sábios e os copistas de obras científicas.

A escola matemática de Bagdad, desenvolveu ao longo de dois séculos, uma imensa actividade. No início, a assimilação da herança das culturas grega e oriental, esteve em primeiro plano. Os mais importantes trabalhos de Euclides, Arquimedes e muitos outros, foram traduzidos para árabe a partir de originais ou de traduções sírias.

---

[2] ***Califa*** *– significa* ***"sucessor"*** *do Profeta.*

[3] *Por curiosidade, refira-se que estes califas são os herois das* ***Mil e uma Noites****.*

Muitas obras foram traduzidas várias vezes, como é o caso dos Elementos de Euclides. Os investigadores que participaram nas traduções, foram acrescentando vários comentários, contribuindo para enriquecê-las. Os conhecimentos vindos da Índia, e mais tarde da China tiveram grande peso no desenvolvimento das ciências matemáticas.

Para além dos problemas cuja natureza se liga ao quotidiano, como os que se relacionam com o comércio, as finanças, as partilhas de heranças, cálculos de arquitectura, etc., a astronomia que teve um papel preponderante no progresso das matemáticas. Os matemáticos do mundo islâmico, eram frequentemente astrónomos. A construção de instrumentos científicos atingiu um alto grau de perfeição, sendo disso exemplo a clepsidra. Os observatórios astronómicos estavam equipados com os instrumentos mais perfeitos da época, donde resultava uma grande exigência de perfeição dos cálculos. As viagens a países longínquos, bem como as longas travessias marítimas, impulsionaram o progresso da astronomia e da geografia. Os problemas que interessavam à escola matemática de Bagdad desde o seu início pertenciam, portanto, aos domínios da aritmética comercial, do cálculo de figuras geométricas, do cálculo de construções por aproximação, da trigonometria e da álgebra numérica.

Apesar da proximidade de interesses e objectivos dos países islâmicos com a Índia e a China, o legado clássico conduziu a grandes diferenças. As regras de cálculo particulares dos indianos e chineses, foram transformadas em meios mais eficazes para resolver e generalizar problemas, tendo estado muitas vezes na origem do desenvolvimento de toda uma teoria.

De todas as obras clássicas, os ***Elementos*** de Euclides terá sido, provavelmente, a que teve o papel mais importante no desenvolvimento da cultura matemática islâmica. Mais de cinquenta matemáticos desde finais do séc. VIII, até metade do séc. XV, traduziram e comentaram esta obra.

O filósofo **Abū Nasr Muhammad ibn Muhammad al-Farābīī** (870 - 950) teve um papel fundamental. O seu interesse pelos ***Elementos*** explica-se pela importância que neles tem a análise dos conceitos fundamentais da Geometria e da Aritmética, ou seja, os conceitos que têm um lugar importante nas obras de Aristóteles. Na sua obra ***Šarh al-mustağlaq min musādarāt al-maqāla al-ulāā wa-l-hāmisa min Uqlīdis*** (Comentários das dificuldades encontradas nas introduções aos Livros I e V de Euclides), al-Farābī escreve, a propósito das definições de ponto, linha e superfície, o seguinte: *"Devemos começar o estudo com um corpo concreto e considerar em seguida um corpo separado das percepções sensíveis que lhe estão ligadas; chegamos então à superfície, à linha e finalmente ao ponto."*. Estas definições são claramente baseadas na concepção de Aristóteles, segundo a qual, os conceitos matemáticos são tirados por abstracção das propriedades das coisas reais. O facto de chamar a atenção para as obras de Aristóteles influenciou muitos trabalhos matemáticos posteriores, como por exemplo os de al-Khayyām (1048-1131).

O Tratado de Álgebra de Al-Khwārizm

Capa do Tratado

Uma página do Tratado

O seu nome, **Abū ‘Abdallah Muhammad Ibn Mūsā Al-Khwārizmī Al-Mağūsī** (780?-850) sugere que ele, ou algum dos seus antepassados, veio de Khwarizm, a região sul do Mar Aral, parte do Uzbequistão e do Turkmenistão. O nome de Mağūsī sugere que alguns dos seus antepassados eram magos, ou seja, padres da religião zoroastriana que, com efeito, se desenvolveu em Khwarizm.

Al-Khwārizmī[4] foi um dos primeiros eruditos da Casa da Sabedoria, fundada pelo Califa al-Ma’mūn e também foi um dos astrónomos chamados para fazer o horóscopo do Califa moribundo al-Wāthiq, em 847. Reza a história, que embora Al-Khwārizmī tenha assegurado ao Califa que ele viveria outros cinquenta anos, na realidade o Califa morreu dez dias depois. Talvez Al-Khwārizmī sentisse que não era boa política ser portador de más notícias ao seu soberano.

Para além das contribuições para as matemáticas, de que são exemplos as obras ***Kitab al-jam’wal tafrīq bi hisāb al-Hind*** (O Livro da Adição e Subtracção segundo o sistema Indiano) e ***Al-Kitāb al-muhtasar fī hisāb al-ğabr wa-l-muqābala*** (Breve obra sobre o cálculo da álgebra e do mucabala), Al-Khwārizmī trabalhou também sobre a determinação do calendário de que a obra ***Istihrāğ ta’rih al-yahūd*** (determinação do calendário judeu), é exemplo. Esta obra contém citações bíblicas, que fazem supor que teria algum conhecimento da religião judaica. Trabalhou também em astronomia, tendo escrito uma obra baseada nas antigas

---

[4] *O seu nome, **Al-Khwārizmī**, deu origem às palavras* ***algarismo*** *e* ***algorítmo.***

fontes persas e indianas, e nela aparecem as primeiras tabelas árabes de senos e tangentes. Na área de Geografia, escreveu uma obra baseada na Geografia de Ptolomeu contendo vários elementos originais, tendo ainda desenvolvido um detalhado mapa do mundo islâmico.

O Tratado de Álgebra, ***Al-Kitāb al-muhtasar fī hisāb al-ğabr wa-l-muqābala*** (Breve obra sobre o cálculo da álgebra e do mucabala), é composto por três partes. A primeira, puramente algébrica, precede um breve capítulo sobre contratos comerciais, efectuados com o recurso à regra de três simples. Uma segunda parte sobre geometria, muito resumida, sobre medidas e utilização da álgebra. A terceira parte, trata de questões relacionadas com heranças e testamentos.

Existem várias traduções para latim desta obra, mas não contêm nem a segunda, nem a terceira partes.

Como já foi dito atrás (pgs. 2 e 3), a necessidade de resolução de problemas da vida quotadiana, era o principal motor do desenvolvimento científico. O Tratado de Al-Khwārizmī não foi diferente. O objectivo principal, ao qual mais de metade desta sua obra foi consagrado, era o de escrever um manual prático que pudesse resolver problemas particulares relativos a testamentos e heranças. O direito sucessório muçulmano tinha regras rígidas e bastante complexas, que determinavam as partilhas em função dos graus de parentesco, limitando os direitos do doador. Os juristas deparavam-se frequentemente com situações muito difíceis de resolver.

Veja-se um exemplo de um problema deste tipo, apresentado no Tratado[5]:

"Por sua morte, um homem deixa uma parte igual do seu capital a cada um dos seus quatro filhos, enquanto que deixa a uma outra pessoa uma parte igual a cada uma da dos seus filhos, mais um quarto do que resta de um terço do capital depois de ter retirado esta parte, mais um dirham."

Dado que ainda não era usada escrita simbólica, este problema tem uma resolução extremamente longa, mas não deixa de possuir natureza algébrica.

Designemos por **z** o capital, por **x** a parte de um dos filhos e por **y** a parte dada à pessoa. Temos assim as seguintes equações:

$$z = y + 4x$$

$$y = x + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) + d$$

Destas obtém-se, depois das transformações necessárias,

[5] Youschkevitch, Adolf - *Les Mathématiques Arabes*, Vrin, Paris, 1976

$$z = \left(5 + \frac{2}{11}\right)x + \left(1 + \frac{1}{11}\right)d$$

No fundo, é de uma forma semelhante que al-Khwārizmī opera. A regra da resolução, segundo al-Khwārizmī, pode enunciar-se da seguinte forma:

"Toma-se um terço do capital e retira-se uma parte. Retira-se em seguida uma parte do que resta de um terço do capital menos uma parte e um dirham, de tal forma que restam três quartos e um terço do capital ou seja, um quarto do capital menos três quartos de uma parte menos um dirham.

$$\text{i.e., } \left[\frac{1}{3}z - x - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) - d = \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d\right]$$

Esta quantidade é somada aos dois terços do capital; de seguida onze doze avos da parte do capital menos três quartos da parte, menos um dirham são iguais a quatro partes

$$\text{i.e., } \left[\frac{2}{3}z + \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d = \frac{11}{12}z - \frac{3}{4}x - d = 4x\right]$$

Soma-se em seguida três quartos de uma parte mais um dirham; onze doze avos da parte do capital são iguais a quatro e três quartos da parte mais um dirham

$$\text{i.e., } \left[\frac{11}{12}z = \left(4 + \frac{3}{4}\right)x + d\right]$$

Multiplicando agora por $\frac{12}{11}$, al-Khwārizmī junta a cada termo um undécimo e determina que o capital se cifra em $5\frac{2}{11}$ de uma parte mais $1\frac{1}{11}$ dirham."

Note-se que neste problema, bem como em muitos outros semelhantes, o ***dirham*** tem o papel de um parâmetro.

A(s) equação(ões) do 1º e 2º graus

Na sua obra, Al-Khwārizmī ensina como resolver equações do segundo grau e equações lineares com coeficientes numéricos. Segundo ele, em aritmética encontram-se números ordinários, mas em álgebra encontram-se três tipos de números:

Os números simples, ou dirham (do dracma grego – unidade monetária);

O ǧizr (raíz), múltiplo do desconhecido;

O māl (bem, montante, etc., mas também quadrado). O māl é o produto de ǧizr por si própria.

Exemplos da utilização dos termos algébricos:

$\boldsymbol{x^2 = 5x}$ (um quadrado é igual a cinco raízes);

$\boldsymbol{\frac{x^2}{3} = 4x}$ (a terça parte de um quadrado é igual a quatro raízes);

$\boldsymbol{x^2 = 9}$ (um quadrado é igual a nove);

$\boldsymbol{4x = 20}$ (quatro raízes são iguais a 20).

No início da sua obra, Al-Khwārizmī começou por dividir as equações do primeiro e segundo graus em seis tipos diferentes e é na resolução de cada uma destas equações que intervêem os processos de al-ğabr[6] (substituição, transposição) e al-muqābala (redução, eliminação), que constam do título da obra. Essas seis formas canónicas são:

1. Quadrados igual a raízes	$ax^2 = bx$
2. Quadrados igual a números	$ax^2 = c$
3. Raízes igual a números	$bx = c$
4. Quadrados e raízes igual a números	$ax^2 + bx = c$
5. Quadrados e números igual a raízes	$ax^2 + c = bx$
6. Raízes e números igual a quadrados	$bx + c = ax^2$

Para ser possível resolver qualquer equação, é necessário reduzi-la a um dos seis tipos enunciados. Assim, se um termo for negativo, utilizar-se-á o al-ğabr, que consiste em somar aos dois membros da equação duas quantidades iguais àquela que está afectada pelo sinal negativo. Reduz-se em seguida os termos semelhantes com a ajuda do al-muqābala, e por último o coeficiente do termo do segundo grau deve ser igual à unidade. Veja-se o seguinte exemplo (com a actual notação):

$$\begin{aligned} 2x^2 + 40 - 12x = 22 &\quad <=> \quad \text{(al-ğabr)} \quad 2x^2 + 40 = 22 + 12x \\ 2x^2 + 40 = 22 + 12x &\quad <=> \quad \text{(al-muqābala)} \quad 2x^2 + 18 = 12x \\ 2x^2 + 18 = 12x &\quad <=> \quad \text{(al-muqābala)} \quad x^2 + 9 = 6x \end{aligned}$$

Note-se que a equação tipo 1, é tratada por Al-Khwārizmī, como uma equação linear, porque a solução nula não é interessante para os problemas concretos[7].

Na resolução das equações completas do segundo grau, enuncia as **regras** para determinação das raízes, e apresenta as **demonstrações geométricas** bem como **aplicações numéricas**.

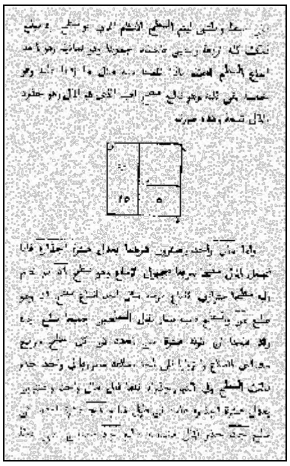
[6] ***al-ğabr*** *– raiz da actual palavra* ***álgebra.***

[7] *Procedeu-se desta forma até ao séc. XVII.*

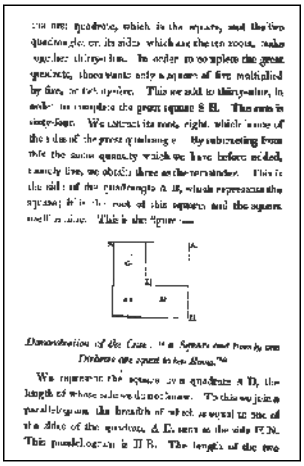
Veja-se o exemplo da resolução de uma equação do tipo **4** $\left(x^2 + px = q\right)$:

$$\boldsymbol{x^2 + 10x = 39}$$

A resolução desta equação é baseada em construções geométricas, correspondentes a um procedimento que consiste em "**completar o quadrado**".

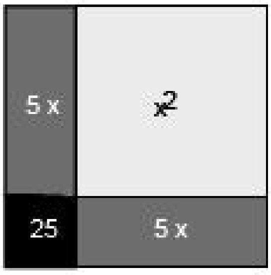


Página do tratado de Álgebra de Al-Khwārizmī



Uma tradução dessa mesma página para inglês

Para resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, procede-se da seguinte forma:



Construir um quadrado $\left(x^2\right)$.

Sobre os lados deste quadrado, construir dois rectângulos de dimensões x e 5 .

Para se obter o quadrado maior acrescentam-se o quadrado no canto, cujo lado é igual a **5**. Por construção:

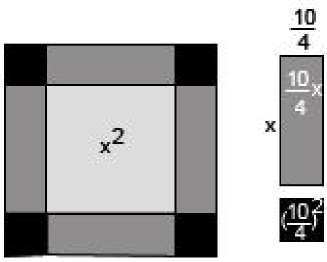
- o lado deste quadrado maior é **5 + x**;
- a sua área pode ser determinada da seguinte forma:

$$x^2 + 5x + 5x + x^2 = \underbrace{x^2 + 10x}_{=39} + 25 = 64$$

donde, a medida do lado será $\sqrt{64} = 8$. Logo,

$$5 + x = 8 \Leftrightarrow x = 3$$

Outra forma de completar o quadrado é a seguinte:



Construir um quadrado$\left(x^2\right)$.

Sobre os lados deste quadrado, construir quatro rectângulos de dimensões x e $\dfrac{10}{4}$.

Para se obter o quadrado maior acrescentam-se os quadrados nos cantos, cujos lados são iguais a $\dfrac{10}{4}$. Por construção:

- o lado deste quadrado maior é $\dfrac{10}{4}+x+\dfrac{10}{4}=5+x$;
- a sua área pode ser determinada da seguinte forma:

$$x^2+4\left(\frac{10}{4}x\right)+4\left(\frac{10}{4}x\right)^2=\underbrace{x^2+10x}_{=39}+25=64$$

donde, a medida do lado será $\sqrt{64}=8$. Logo,

$$5+x=8\Leftrightarrow x=3$$

Generalizando para $x^2+px=q$,

$$x^2+4\left(\frac{p}{4}x\right)+4\left(\frac{p}{4}x\right)^2=\underbrace{x^2+px}_{=q}+4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$\left(x+2\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$x+2\frac{p}{4}=\sqrt{q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2}$$

$$x=\sqrt{q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2}-\frac{p}{2}$$

Obtem-se assim a regra de Al-Khwārizmī, para as equações do tipo 4 (notação actual).

Note-se que nem neste, nem nos outros casos, as raízes negativas são tomadas em consideração.

Segue-se um exemplo da resolução de uma equação do tipo **5** $\left(x^2+q=px\right)$.

$$\boldsymbol{x^2+21x=10x}$$

Al-Khwārizmī começa por afirmar que, neste caso, podem existir duas raízes (positivas), uma só raiz (dupla) ou nenhuma (as raízes não são reais).

A determinação de cada uma das raízes é baseada em construções geométricas diferentes. A construção geométrica do segundo caso, não se encontra no manuscrito árabe da obra de Al-Khwārizmī conservado em Oxford, mas encontra-se em numerosas traduções para latim da sua álgebra.[8]

Na determinação da primeira raíz, utiliza-se uma construção geométrica em que $\boldsymbol{x < \frac{10}{2}}.\left(x < \frac{p}{2}\right)$.

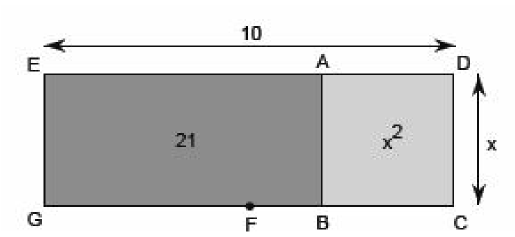


Fig. 1

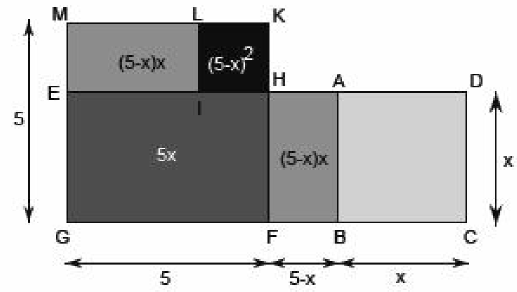


Fig. 2

Inicia-se pela construção de um rectângulo, de lados 10 e x, formado por um quadrado $[ABCD]$ (x^2) e um rectângulo $[GCDE]$ $((10-x)x)$. Determina-se F, o ponto médio de GC. (Ver Fig 1)

A partir de F determina-se o segmento FK perpendicular a GC e tal que $HK = HA = 5 - x$. Desenham-se os quadrados $[GFKM]\left(5^2\right)$ e $[IHKL]\left((5-x)^2\right)$. (Ver Fig 2)

Por construção os rectângulos $[EILM]$ e $[FBAH]$ são congruentes (os lados correspondentes são iguais dois a dois). Logo,

$$IHKL = GFKM - \left(GFHE + \underbrace{EILM}_{FBAH}\right)$$

$$\underbrace{IHKL}_{(5-x)^2} = \underbrace{GFKM}_{5^2} - \left(\underbrace{GFHE + FBAH}_{21}\right)$$

$$(5-x)^2 = 5^2 - 21$$

$$(5-x)^2 = 4$$

$$5 - x = 2$$

$$x = 3$$

Logo, a raíz é 3.

[8] Karpinski, L.Ch., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, New York, 1915

Generalizando para $x^2 + q = px$,

$$\underbrace{IHKL}_{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2} = \underbrace{GFKM}_{\left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\underbrace{GFHE + FBAH}_{q}\right)$$

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Na determinação da segunda raíz, utiliza-se uma construção geométrica em que $\boldsymbol{x > \frac{10}{2}}.\left(x > \frac{p}{2}\right)$.

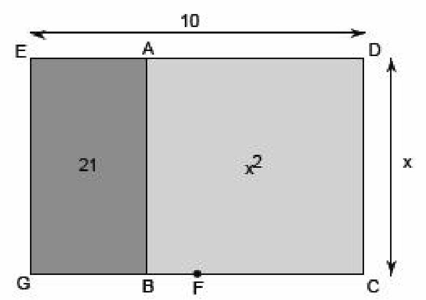


Fig. 3

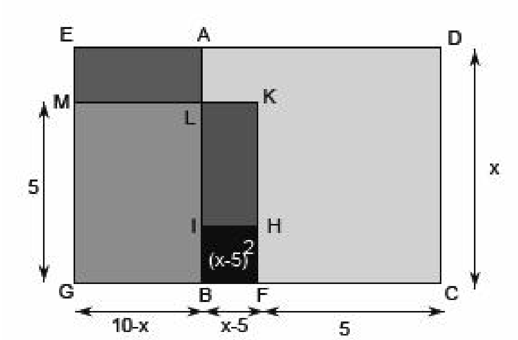


Fig. 4

Inicia-se pela construção de um rectângulo, de lados 10 e x, formado por um quadrado $[ABCD]$ (x^2) e um rectângulo $[GCDE]$ $((10-x)x)$. Determina-se F, o ponto médio de GC. (Ver Fig 3).

A partir de F determina-se o segmento FK perpendicular a GC e tal que $FK = MK = 5$. e $FH = BF = x - 5$.(Ver Fig 4)

Por construção os rectângulos $[EALM]$ e $[IHKL]$ são congruentes (os lados correspondentes são iguais dois a dois). Logo,

$$\underbrace{BFHI}_{(x-5)^2} = \underbrace{GFKM}_{5^2} - \left(\underbrace{GBLM + IHKL}_{21}\right)$$

$$(x-5)^2 = 5^2 - 21$$

$$(x-5)^2 = 4$$

$$x - 5 = 2$$

$$x = 7$$

Logo, a raíz é 7.

Generalizando para $x^2 + q = px$,

$$\underbrace{BFHI}_{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2} = \underbrace{GFKM}_{\left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\underbrace{GBLM + IHKL}_{q}\right)$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Resumindo, a regra de Al-Khwārizmī para as equações do tipo 5 é (em notação actual):

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \quad x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

A não existência de escrita simbólica, obrigava a que as descrições das regras fossem longas e detalhadas. Pode ver-se a exposição da resolução desta equação como exemplificativa dessas descrições.

A regra de Al-Khwārizmī expressa-se da seguinte forma[9]:

"Dividir em dois as raízes; obtem-se 5; multiplicar 5 por ele próprio; obtem-se 25; retirar os 21 que estão somados ao quadrado; obtem-se 4; extrair a raíz; obtem-se 2;

- retirá-lo à metade da raíz; obtem-se 3; esta é uma raíz procurada;

- adicionar-lo à metade da raíz; obtem-se 7; esta é a outra raíz."

e Al-Khwārizmī continua,

"quando se divide em dois as raízes, se multiplica o resultado por si próprio e o produto é menor que os dirhams que estão somados ao quadrado, então o problema é impossível[10]; se for igual, então a raíz do quadrado é igual a metade da raíz, sem retirar nem adicionar o que quer que seja[11]."

---

[9] Youschkevitch, Adolf - *Les Mathématiques Arabes*, Vrin, Paris, 1976

[10] *Corresponde ao caso em que* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$.

[11] *Corresponde ao caso em que* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$.

História das Matemáticas na Antiguidade.

Jorge Nuno Silva

A História das Matemáticas na Antiguidade, de Fernando de Vasconcellos, obra há muito esgotada, foi reeditada pela Associação Ludus, com edição e coordenação de Augusto Franco de Oliveira.

Da contra-capa, uma citação de Francisco Gomes Teixeira:

Para o estudo desenvolvido da história das Matemáticas entre os Gregos, Hindus e Árabes, não é felizmente necessário em Portugal recorrer-se a livros estrangeiros, porque temos para isso em língua portuguesa um manual excelente, intitulado: História das Matemáticas na Antiguidade, de que é autor o Sr. Fernando de Vasconcellos, professor no Instituto Superior de Agronomia.

http:/ludicum.org/publicacoes/

Colóquio Internacional:

Alvarus Thomas: reopening the *Liber de triplici motu* (1509)

Um momento singular nos estudos de história da ciência portuguesa

Henrique Leitão

Aproveitando a ocasião do quinto centenário da publicação do *Liber de triplici motu* (1509) de Álvaro Tomás, o Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (Pólo da U. Lisboa), promoveu a realização de um Colóquio Internacional, no passado dia 28 de Setembro, com o título **Alvarus Thomas: Reopening the *Liber de triplici motu* (1509)**.

O Simpósio foi organizado por Samuel Gessner e Henrique Leitão (ambos do CIUHCT/ Univ. de Lisboa) e teve por objectivo principal reunir um grupo de especialistas para dar a conhecer as mais recentes descobertas sobre Álvaro Tomás, fazendo um ponto da situação acerca dos conhecimentos em torno da sua vida e da sua obra. O Colóquio serviu ainda como ponto de partida para o início de colaborações internacionais com vista ao estudo deste matemático português.

Foram apresentadas as seguintes comunicações: Putting Alvarus Thomas on the map (Henrique Leitão, CIUHCT/Universidade de Lisboa); Alvarus Thomas as a missing link between scholastic and early modern science: The case of Thomas Harriot's work on motion (Matthias Schemmel, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin); Liber de triplici motu: The transformation of a text (Stefan Paul Trzeciok, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin); Les réponses d'Alvarus Thomas aux questions que pose la théorie des rapports au Moyen Âge (Sabine Rommevaux, CNRS, Centre d'études supérieures de la Renaissance, Tours); Alvarus Thomas and the summation of series, Carlos Correia de Sá, Departamento de Matemática Pura da FCUP e CMUP); Understanding Alvarus Thomas in 1914 and today: lessons from a reading of Wieleitner's study of the *Liber de triplici motu* (Samuel Gessner, CIUHCT/Universidade de Lisboa)

Os estudos sobre Álvaro Tomás têm conhecido um incremento assinalável nos últimos anos. Sabe-se hoje que o seu livro teve uma grande difusão e que muito foi influente junto de homens de ciência como Thomas Harriot ou Kenelm Digby. Os seus resultados matemáticos, sobretudo em soma de séries, foram comentados por muitos, e o seu tratamento de teoria de proporções foi muito conhecido. Além disso, têm sido localizados cada vez mais exemplares do *Liber de triplici motu*, confirmando a grande divulgação da obra.

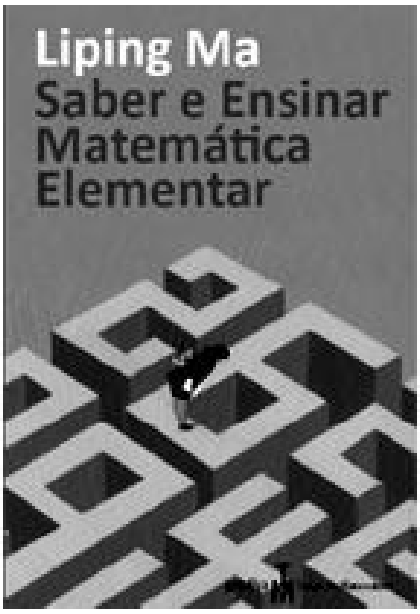
Estão presentemente a ser feitas duas traduções do *Liber de triplici motu*: Para português, em Braga, por Carlos Vilar, e para alemão, em Berlim, por Stefan Paul Trzeciok. O livro está também integralmente disponibilizado *online* em vários sites, e está incluído na importante plataforma ECHO.

O leitor interessado tem muita informação sobre Tomás e o seu livro no *site*:

http://chcul.fc.ul.pt/act_ii/tomas_500.htm

S*obre* Saber e Ensinar Matemática Elementar *de Liping Ma*

Carlos Pereira dos Santos
ISEC



O livro da investigadora chinesa, Liping Ma, chegou recentemente a Portugal tendo sido apresentado em Viana de Castelo no dia 4 de Setembro na Biblioteca Municipal pelos professores Arsélio Martins (Presidente da APM), Jorge Nuno Silva (Editor deste jornal e Presidente da Associação Ludus) e Peter Gothen (FCUP). O seu lançamento aconteceu no dia 7 de Setembro, em Ponta Delgada, durante a Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática, contando com a presença de Nuno Crato (Presidente da SPM) e Carlos Pereira dos Santos (autor deste artigo).

Este livro é o oitavo da colecção "Temas de Matemática", uma iniciativa conjunta da Gradiva e da Sociedade Portuguesa de Matemática. Iniciar-se-á neste artigo uma análise sobre o conteúdo do livro destacando as características que o tornam uma leitura imperdível.

Comentário Geral

A matemática elementar não é uma simples colecção desconexa de factos sobre números e algoritmos de cálculo. Antes, é um campo intelectualmente exigente, desafiador e excitante.

Esta frase, retirada do capítulo cinco do livro em causa, só por si, serviria bem para explicar o que constitui o seu conteúdo. Realmente, e de forma infeliz, até matemáticos experimentados por vezes tendem a pensar que a matemática elementar é um mero conjunto de esquemas procedimentais que devem ser adquiridos de forma competente em criança e que é uma espécie de «pré-matemática avançada» que servirá o futuro de forma meramente instrumental. Este pensamento tem alguma verdade, mas não é tudo. Não é de forma alguma tudo, e é por isso que o presente livro constitui um excelente e extremamente raro documento.

Tendo como pano de fundo um estudo comparativo China/EUA, o livro é muito mais do que isso. Mostra a enormíssima diferença entre um professor competente apenas nos aspectos procedimentais e um professor competente nos aspectos procedimentais juntamente com os aspectos conceptuais. E o conquistar deste patamar mais alto de competência não nasce nas árvores nem com pouco tempo de trabalho. Não aparece lendo documentos plenos de frases bonitas e verdadeiras como «a criança deve apreender o conceito do número» ou «a criança deve aprender a interpretar problemas matemáticos» mas que depois não concretizam o que isso significa. E os professores da formação inicial precisam é exactamente isso, mais do que frases bonitas, saber realmente o que são os verdadeiros alicerces da matemática.

A obra de Liping Ma é muito rica por vários motivos. Um dos principais consiste em «colocar a mão na massa». Através da própria construção do estudo, utilizando questões muito bem escolhidas, analisa, muitas vezes com bastante detalhe, aspectos ligados à matemática elementar. A pretensão do livro não é ser exaustivo e metódico no que diz respeito à matemática, mas aponta a forma de o fazer. Mostra que, quando a matemática elementar é bem tratada, é sistemática, muito bem encadeada esclarecendo bem as bases do conhecimento e os conceitos-nó, muitíssimo atenta à oralidade e à palavra (a necessidade de rigor é inversamente proporcional à idade dos alunos e não o contrário). Mostra que bons professores de formação inicial têm necessariamente perspectivas múltiplas sobre os vários assuntos elementares e são capazes de as ligar. Mostra como se pode atingir competência estudando materiais de ensino desde que estes sejam bem construídos, limados de ano para ano ao longo de vários anos, pensados não por cabeças dispersas, mas com uma perspectiva de encadeamento sem saltar camadas e sem abordar temas mais complexos sem tratar primeiros os mais simples. Quando a autora falou com professores chineses de elevada competência eles dizem ser sua prática “estudar materiais de ensino intensivamente” (termo chinês *zuanyan jiaocai*). Coloquemos os olhos nestes exemplos e procuremos pensar sobre isso. Os ditos manuais foram cuidadosamente redigidos por professores experientes, reconhecidos a nível nacional e sujeitos a revisão ao longo de anos...

Nunca se deve desrespeitar algoritmos milenares. Nunca se deve subestimar a matemática elementar aperfeiçoada ao longo de anos. Os matemáticos profissionais têm por vezes tendência a pensar que são meramente conteúdos simples para serem administrados a crianças. No entanto, essa simplicidade é elegante, muito sofisticada e só se aprende com trabalho. Se não o fosse, a humanidade não teria demorado tanto para a conseguir. Este livro é leitura obrigatória para professores do ensino básico, mas é leitura igualmente obrigatória para todas as pessoas adultas incluindo os matemáticos de nível universitário.

As Quatro Questões

O estudo não se baseia num largo questionário. Baseia-se apenas em quatro questões organizadas por temas recorrentes na prática docente dos primeiros anos. É necessário ter em conta que na China e nos EUA os professores que leccionam os 6 primeiros anos são os mesmos. Em Portugal, não é frequente os professores do 1º Ciclo leccionarem também no 2º Ciclo. Sendo assim, a questão relativa às fracções ainda é mais pertinente no caso desses países. Eis a lista de questões:

Questões:

I (Corrigir Erros de Alunos)

Alguns professores notam que alguns dos seus alunos cometem o mesmo erro na multiplicação com números com vários algarismos. Ao tentar calcular 123×645, alguns alunos fazem o seguinte:

$$
\begin{array}{r}
123 \\
\times\ 645 \\
\hline
615 \\
492 \\
+\ 738 \\
\hline
1845
\end{array}
$$

O que faria ao reparar que alguns dos seus alunos cometem o erro presente nesta conta?

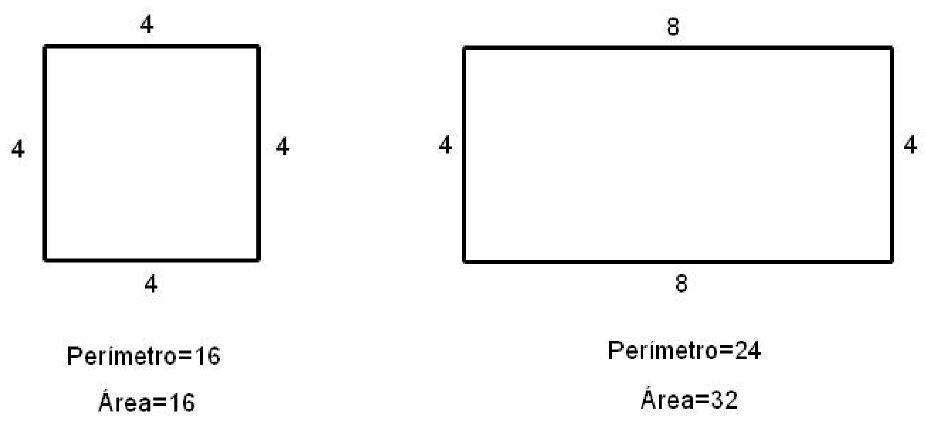
II (Ensinar um Tópico)

$$
\begin{array}{r}
62 \\
-\ 49 \\
\hline
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcc}
 & 5 & 12 \\
- & 4 & 9 \\
\hline
 & 1 & 3
\end{array}
$$

Se estivesse a ensinar o segundo ano, como abordaria o ensino deste método utilizado para subtrair? O que diria que os alunos precisavam de entender ou de ser capazes de fazer, antes de poder começar a aprender a subtracção por reagrupamento?

III (Reacção Face a um Tópico Inesperado Trazido por um Aluno)

Imagine que uma das suas alunas chega à aula bastante excitada. Ela diz-lhe que descobriu uma teoria que você nunca tinha ensinado à turma. Explica ter descoberto que, quando o perímetro de uma figura fechada aumenta, a área também aumenta. Mostra um desenho para ilustrar a sua ideia:



O que diria a esta aluna?

IV (Gerar Representações)

As pessoas parecem adoptar diferentes abordagens na resolução de problemas envolvendo a divisão de fracções. Efectue o seguinte cálculo:

$$7/4 : ½$$

Imagine que está a ensinar a divisão de fracções. Para que isto tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam mostrar as aplicações da matemática. Por vezes tentam arranjar situações da vida real ou estórias problema para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa estória ou um bom modelo para 7/4 : 1/2?

Exemplos de Respostas de Professores Chineses

Claramente que uma das coisas que o livro tem de melhor são as respostas dos professores. Irei analisar, para cada uma das questões, o que faz de uma resposta uma boa resposta. Para já exponho apenas algumas das respostas para servir de base de trabalho:

Questão I

a)

«Eu começaria com um problema de subtracção fácil, como 43-22. Depois deles o resolverem, mudaria o problema para 43-27. Como é que o problema novo difere do primeiro? O que acontecerá quando estivermos a resolver o segundo problema? Descobrirão que 7 é maior que 3 e que não temos unidades suficientes. Então direi, ok, hoje não temos unidades suficientes. Mas às vezes temos unidades a mais. Devem lembrar-se que na semana passada, quando fizemos a adição com transporte, tínhamos muitas unidades. O que fizemos nessa altura? Eles dirão que as compusemos em dezenas. Então, quando temos muitas unidades, compomo-las em dezenas; o que podemos fazer quando não temos unidades que cheguem? Podemos decompor uma dezena de novo em unidades. Se decompusermos um 10 de 40, o que acontece? Teremos unidades suficientes. Deste modo, introduziria o conceito de decompor uma unidade de ordem superior em 10 unidades de ordem inferior.»

Nota: Alguns professores indicaram que o termo «decompor» sugere a sua relação com o conceito de «compor».

b)

«Porque é que não existem unidades suficientes em 53 para subtrair 6? Cinquenta e três é obviamente maior que 6. Onde estão as unidades de 53? Os alunos dirão que as outras unidades de 53 foram compostas em dezenas. Então irei perguntar o que podemos fazer para ter unidades suficientes para subtrair 6. Espero que eles tenham a ideia de decompor um 10. Caso contrário, proporei isso.»

c)

«Alguns dos meus alunos podem ter aprendido com os seus pais que "pedimos uma unidade emprestada às dezenas e vemo-la como 10 unidades [jie yi dang shi]". Explicar-lhes-ei que não estamos a pedir um 10 emprestado, mas sim a decompor um 10. O "empréstimo" não explica porque podemos tirar um 10 para a posição das unidades. Mas a "decomposição" pode. Quando dizemos decompor, isso implica que os algarismos em posições de ordem superior são de facto compostos a partir daqueles que estão em posições de ordem inferior. São permutáveis. O termo "empréstimo" não significa, de todo, o processo de compor-decompor. "Pedir uma unidade emprestada e transformá-la num 10" parece arbitrário. Os meus alunos podem perguntar-me como podemos pedir emprestado às dezenas. Se pedirmos alguma coisa emprestada, devemos devolvê-la mais tarde. Como e o que vamos devolver? Além disso, ao pedir emprestado, temos de encontrar uma pessoa com disposição para nos emprestar. Então, e se a posição das dezenas não quiser emprestar à posição das unidades? Não saberemos responder a estas questões que os alunos podem colocar.»

Questão II

a)

«O problema é que o aluno não tinha uma ideia clara da razão por que os números devem ser alinhados de modo diferente do da adição. O alinhamento é de facto derivado através de vários passos. Primeiro, coloco no quadro uma igualdade e trabalho-a com os alunos:

$$\begin{aligned} 123 \times 645 &= 123 \times (600 + 40 + 5) \\ &= 123 \times 600 + 123 \times 40 + 123 \times 5 \\ &= 73800 + 4920 + 615 \end{aligned}$$

$$= 78720 + 615$$
$$= 79335$$

O que nos permitiu transformar o problema? A propriedade distributiva. Depois, sugiro que a turma reescreva a igualdade em colunas:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 645 \\ \hline 615 \\ 4920 \\ +73800 \\ \hline 79335 \end{array}$$

Peço aos alunos que observem os zeros na igualdade, bem como os que estão nas colunas. Será que afectam a soma? Porque sim, e porque não? Será que os zeros na igualdade podem ser eliminados? E o zeros nas colunas? Se apagarmos os zeros das colunas, o que acontece? Depois apago os zeros nas colunas e fico no quadro com umas colunas em forma de escada:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ +738 \\ \hline 79335 \end{array}$$

Depois do debate, acredito que o alinhamento na multiplicação fará sentido e será marcante para os alunos.»

b)

«Para além da propriedade distributiva, existe um outro argumento que deve ser incluído na explicação. É a multiplicação de um número por 10 ou por uma potência de 10. Multiplicar por 10 ou por uma potência de 10 é um processo especial que difere da multiplicação normal – para obter o produto, colocamos o número de zeros do multiplicador no fim do multiplicando. Ao multiplicar um número por 10, colocamos simplesmente um zero depois do número, e por 100, pomos dois zeros. Este aspecto explica porque 123 × 40 = 4920.»

c)

Dois terços dos professores chineses de orientação conceptual descreveram um modo mais directo de explicar o procedimento, que não requeria a introdução dos zeros. O seu argumento baseava-se numa expansão do conceito de valor posicional. Em vez de dizer que o 4 em 645 representa 40 e 123×40 é igual a 4920, estes professores argumentaram que o 4 em 645 representa 4 dezenas e 123 multiplicado por 4 dezenas são 492 dezenas. O conceito de unidade básica de um número desempenha um papel importante na numeração. Normalmente usamos "um" como unidade básica de um número. Quando dizemos 123, queremos dizer 123 unidades. Na vida diária tomamos por certo que "um" é a unidade básica de um número. Contudo, podemos usar outra unidade básica para a numeração, se necessário, ou apenas se quisermos. Por exemplo, usando uma dezena, uma centena, uma décima ou até um dois como unidade básica, podemos dizer que o número 123 são 12,3 dezenas, 1,23 centenas, 1230 décimos ou até 61,5 dois.

d)

O Prof. Chen propôs o seu próprio método, bastante sugestivo. Sugeriu usar modos "não convencionais" de resolver o problema para ajudar os alunos a entender o procedimento. Disse que iria motivar os alunos a verem que existe, de facto, mais do que um modo correcto para alinhar as colunas. Avançou que pode haver cinco modos para o alinhamento, para além do convencional:

123	123	123	123	123
×645	×645	×645	×645	×645
-------	-------	-------	---------	--------
615	492	492	738	738
738	615	738	492	615
492	738	615	615	492
--------	--------	----------	-----------	-----------
79335	79335	79335	79335	79335

O professor Chen acreditava que conduzir os alunos a descobrir estes modos não convencionais iria estimular o entendimento do algoritmo e a usarem-no de um modo mais flexível.

Questão III

a)

«A asserção da aluna não é verdadeira. Eu não diria nada, mas mostraria à aluna um contra-exemplo. Por exemplo, por baixo do seu quadrado (com lados de 4 cm), posso desenhar um rectângulo com comprimento de 8 cm e largura de 1 cm. Ela depressa irá perceber que a minha figura tem um perímetro maior, mas área menor do que a dela. Portanto, sem nada dizer, a sua asserção está errada.»

b)

«Primeiro elogiá-la-ei pelo seu pensamento independente. Mas também a farei saber que pode haver duas outras situações. Por exemplo, quando o perímetro aumenta, a área pode aumentar, mas também pode diminuir, ou mesmo permanecer igual. Então mostrar-lhe-ei um exemplo de cada caso para comparar com o seu rectângulo (com comprimento de 8 cm e largura de 4 cm).»

c)

«É óbvio que em alguns casos a asserção é verdadeira, mas noutros não. Porém, quando é que é verdadeira e quando é que não? Por outras palavras, sob que condições é verdadeira, e sob quais não o é? É melhor termos uma ideia clara sobre o assunto. Para clarificar as condições específicas que originam as várias possibilidades, podemos primeiro investigar as condições que irão provocar o aumento no perímetro, e explorar como estas condições afectam a área.»

d)

A solução que alguns professores alcançaram foi: quando o aumento no perímetro de um rectângulo é causado pelo aumento só do comprimento ou só da largura ou de ambos, a área da figura irá aumentar consequentemente; mas quando o aumento no perímetro é causado por um aumento do comprimento e uma diminuição da largura, ou vice-versa, a área não aumentará necessariamente. Portanto, podemos dizer agora que a asserção da aluna não está absolutamente errada, mas está incompleta ou condicional. Sob certas condições é sustentável, mas sob outras não se verifica necessariamente.»Estou contente que tenha levantado a questão. Descobri hoje algo de novo, sobre o qual nunca tinha pensado antes.»

e)

«Podemos examinar porque é que estas condições são sustentáveis. Imaginem como é que a área de uma figura muda quando o seu perímetro muda. Sob as duas primeiras condições, a área original permanece mas uma nova área é-lhe adicionada. Por exemplo, quando o comprimento aumenta mas a largura permanece a mesma, haverá uma área extra expandindo-se horizontalmente a partir da original. Por outro lado, quando a largura aumenta mas o comprimento se mantém o mesmo, haverá uma área extra expandindo-se verticalmente a partir da original. Se ambos, comprimento e largura, aumentarem ao mesmo tempo, a área original expandir-se-á em ambas as direcções. Em qualquer destes casos, a área original continua lá mas alguma área extra foi-lhe acrescentada. Podemos desenhar figuras para ilustrar os casos. De facto, isto também pode ser provado usando a propriedade distributiva. Por exemplo, quando o comprimento aumenta 3 cm, passa a (a + 3) cm. A área será

(a + 3) b = ab + 3b.»

Questão IV

Muitos professores chineses mostraram dominar bem uma classificação das aplicações quotidianas da divisão:

Modelo de Repartição:

«Ontem fui de bicicleta da cidade A até à cidade B. Demorei 1¾ horas para ½ do caminho; quanto tempo demorei na viagem toda?»

«A mãe comprou uma caixa de doces. Ela deu à avó 1/2 do conteúdo da caixa, e essa porção pesava 7/4 kg. Quanto pesava originalmente a caixa?»

Modelo de Agrupamento:

«Cortamos uma maçã em quatro partes iguais. Pegamos em três partes e juntamo-las a uma maçã inteira. Se 1/2 maçã for uma porção, quantas porções podemos obter com 1¾ maçãs?»

«Quantos vezes cabe uma moeda de 50 cêntimos numa quantia de 1 euro e 75 cêntimos?»

Modelo de Produto e Factores:

«Sabemos que a área de um rectângulo é o produto do comprimento pela largura. Digamos que a área de um quadro rectangular é 7/4 metros quadrados e a sua largura é 1/2 metro; qual é o seu comprimento?»

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Nove de copas

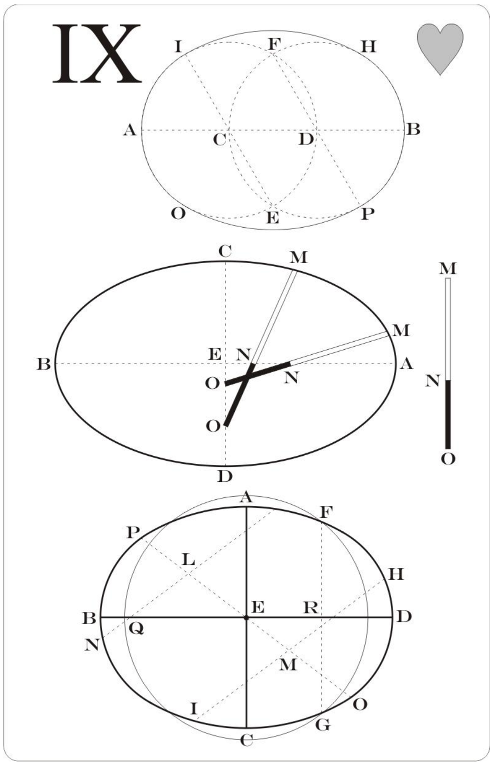
Marisa Ferreira

No Nove de Copas, Descartes dá continuidade às Proposições definidas anteriormente, apresentando-nos três novas Proposições relacionadas com a construção de elipses.

Proposição XII: *Descrever uma elipse sobre um segmento dado.*

Proposição XIII: *Descrever uma elipse sobre dois diâmetros dados.*

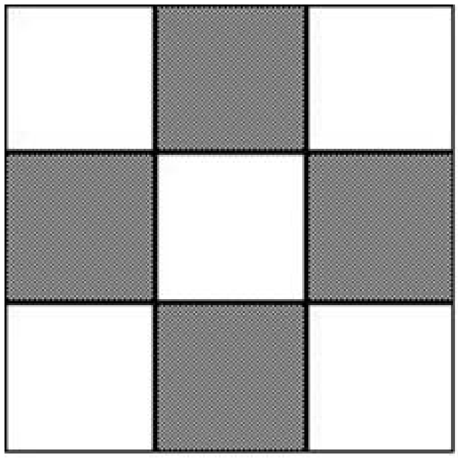
Proposição XIV: *Encontrar o centro e os dois diâmetros de uma elipse.*



PROBLEMA DO MÊS (XVIII)

O califa esperto

Pedro Palhares
Universidade do Minho



No problema XVI dizia-se que dois jogadores alternam a colocar peças num tabuleiro 3x3 (uma apenas por cada quadrado) e que cada jogador, na sua vez, pode colocar quantas peças quiser numa mesma linha vertical ou horizontal sendo que o vencedor é o jogador que colocar a última (nona) peça. Perguntava-se em seguida se é melhor jogar em primeiro ou em segundo e finalmente questionava-se se a resposta seria a mesma se o tabuleiro fosse 4x4.

No último número dava-se como pista analisar o que se passa com o tabuleiro 1x1 e com o tabuleiro 2x2. Mas claro que teremos de refazer as regras.

No tabuleiro 1x1, não poderemos ter 9 peças mas apenas uma. Neste caso, quem for a jogar coloca a primeira e a última peça simultaneamente, logo é melhor jogar em primeiro.

No tabuleiro 2x2, iremos ter 4 peças e ganhará quem colocar a quarta peça. Aqui, temos duas hipóteses:

1 - o que jogar em primeiro lugar pode colocar uma peça num quadrado (é irrelevante qual pois são todos cantos). Neste caso o segundo coloca uma peça na linha e coluna em que não esteja a peça inicial; o primeiro jogador não poderá colocar duas duma vez pois não estão na mesma linha ou coluna; e o que joga em segundo ganha.

2 - Se o que joga em primeiro lugar coloca duas peças numa linha, o segundo colocará duas e ganhará.

Assim, estas simulações iniciais parecem não ter dado grande resultado pois numa ganha o primeiro jogador e na outra ganha o segundo jogador. Mas por outro lado, num caso temos um número ímpar de quadrados e no outro um número par de quadrados. Será que ganha o primeiro jogador no tabuleiro 3x3 e ganha o segundo jogador no tabuleiro 4x4? Deixo ficar ainda esta pergunta para quem quiser tentar de novo.

******

No número anterior apresentei o seguinte problema:

Peguemos em dois números A e B, cuja soma seja 1. Quadremos A e adicionemos B; quadremos B e adicionemos A. Qual a diferença entre os números obtidos? Que números podem ser estes?

Para quem ainda não conseguiu obter uma resposta, esclareço que na pergunta final, que números são estes, na verdade essa pergunta pode colocar-se tanto aos números iniciais A e B como aos números que se obtêm a partir deles pelos dois processos diferentes.

******

Para este número seleccionei o seguinte problema:

Um califa, conhecido pela sua esperteza, disse certo dia a um comerciante: "Você diz que eu devo mais, no entanto eu acho que não devo mais que 34 peças de ouro. Como não conseguimos concordar, e eu sou um homem generoso, vou dar-lhe a hipótese de fazer um grande lucro, assim permita Alá. Estão aqui 16 caixas, dispostas em 4 linhas de 4 caixas cada. Veja, vou colocar 1 peça de ouro nesta caixa, 2 nesta outra e por aqui fora; coloco 16 peças de ouro nesta última. Pode escolher quaisquer 4 caixas que estejam alinhadas, seja horizontal, vertical ou diagonalmente."

O comerciante estudou as caixas e passado um pouco disse: "Senhor, pouco importa que 4 escolho, vou ficar sempre com 34 peças."

" A minha generosidade não conhece limites" disse o Califa. "Pode escolher quaisquer 4 caixas que formem elas próprias um quadrado".

O comerciante estudou as caixas de novo e disse: "Senhor, todos os quadrados contêm exactamente 34 peças."

"Eu sou justo, não apenas generoso", disse o Califa. "Antes que faça a sua escolha, vou deixar que mova qualquer número de filas da esquerda para a direita, ou de cima para baixo, ou ambas as coisas".

O comerciante estudou as caixas de novo e finalmente disse: "Senhor, não questiono a sua generosidade, no entanto seja qual for a mudança de filas que faça, não consigo mudar o número de peças de ouro que venha a pegar. Estou agora convencido que Alá me quis mostrar que não me devia mais do que 34 peças de ouro".

Em que ordem colocou o Califa as moedas nas caixas? (mostra-se a colocação das moedas em 5 das caixas para ajudar).

1			
	3		
			2
14			11

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para *palhares@iec.uminho.pt*, colocando problema do mês como título.

Índice